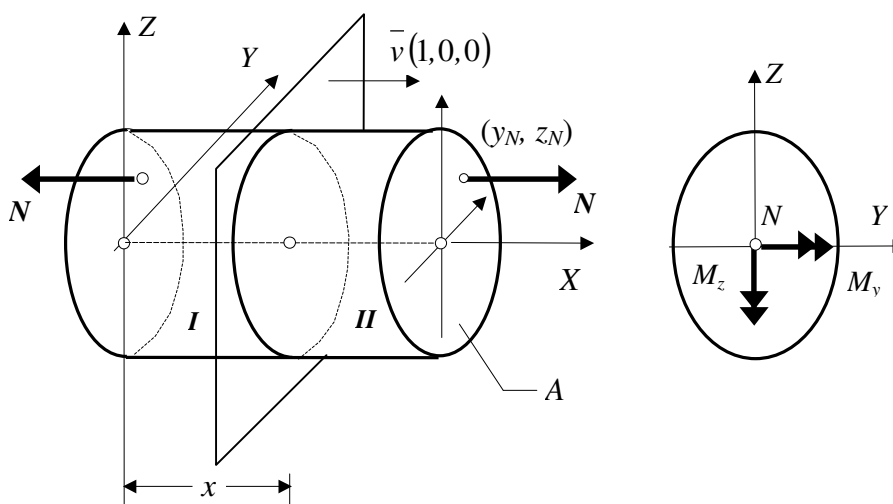


14. MIMOŚRODOWE ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE

14.1. Naprężenia i odkształcenia

Mimośrodowe rozciąganie pręta pryzmatycznego występuje wówczas gdy układ sił zewnętrznych po jednej stronie jego przekroju poprzecznego redukuje się do wypadkowej \bar{N} równoległej do osi pręta, zaczepionej poza jego środkiem ciężkości. Poszukiwać będziemy elementów macierzy naprężeń i odkształceń dowolnym punkcie tak obciążonego pręta.

Rozważmy więc, pokazany na rys. 14.1 pręt pryzmatyczny o polu przekroju poprzecznego A określony w układzie osi (X, Y, Z) w którym oś X jest osią pręta a osie (Y, Z) są głównymi centralnymi osiami bezwładności jego przekroju poprzecznego. Materiał pręta jest izotropowy, liniowo sprężysty o stałych materiałowych E oraz ν . Wypadkowa \bar{N} , normalna do przekroju, zaczepiona jest w punkcie o współrzędnych y_N oraz z_N .



Rys. 14.1

Przy rozwiązywaniu postawionego zadanie wykorzystamy wyniki uzyskane dla przypadku osiowego rozciągania i prostego zginania.

Zgodnie z zasadą de Saint-Venanta statycznie równoważne obciążenia wywołują jednakowe stany naprężenia i odkształcenia, a to pozwala zastąpić wypadkową \bar{N} , zaczepioną w punkcie (y_N, z_N) równoważnym układem złożonym z siły podłużnej N , zaczepionej w środku ciężkości pręta i dwoma momentami $M_y = N z_N$ i $M_z = N y_N$, których wektory są równoległe do odpowiednich osi układu odniesienia (rys. 14.1). W ten sposób otrzymaliśmy osiowe rozciąganie i dwa proste zginania względem osi Y i Z , dla których macierze naprężeń są już nam znane. We wszystkich tych trzech przypadkach jedynym niezerowym elementem macierzy naprężeń jest naprężenie normalne σ_x . Sumowanie, zgodnie z zasadą superpozycji, daje wzór określający te naprężenia, dla analizowanego przypadku, w postaci:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y \quad (14.1)$$

lub, po wykorzystaniu zależności między N oraz, M_y i M_z w formie:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N z_N}{J_y} z + \frac{N y_N}{J_z} y. \quad (14.2)$$

Macierz odkształceń odpowiadając temu stanowi naprężenia łatwo wyznaczymy z równań

Hooke'a, i będzie ona zawierała jedynie trzy odkształcenia liniowe, z których dwa są sobie równe.

Wyżej otrzymane wzory mogą być również stosowane w tej formie przy mimośrodowym ściskaniu prętów bardzo krępych, gdyż tylko wówczas spełniona jest zasada zeszywnienia, przy której założeniu wzory te zostały wyprowadzone może być przyjęta. W przypadku ściskania przypadku wypadkowa \bar{N} ma zwrot przeciwny do normalnej zewnętrznej, a jej współrzędnej N przypisujemy znak ujemny.

Jeżeli we wzorze (14.2) przestrzegać będziemy umowy znakowania sił podłużnych (plus dla siły rozciągającej, minus dla ściskającej) oraz tego, że (y_N, z_N) oraz (y, z) oznaczają współrzędne punktów w których wyznaczamy naprężenia w przyjętym układzie odniesienia, to wyznaczone naprężenia będą miały znaki zgodne z przyjętą dla nich umową znakowania.

13.2. Analiza stanu naprężenia i odkształcenia

W tym przypadku w pręcie występuje jednoosiowy, niejednorodny stan naprężenia. Wartości naprężeń normalnych σ_x nie zależą od zmiennej x , są liniową funkcją zmiennych y i z .

Wyniki analizy stanu naprężenia i odkształcenia są analogiczne jak w przypadkach osiowego rozciągania, prostego czy ukośnego zginania. Podobnie też jak w poprzednich przypadkach końce wektorów naprężenia σ_x leżą na płaszczyźnie - płaszczyźnie naprężeń. Krawędź przecięcia się płaszczyzny naprężeń z płaszczyzną przekroju poprzecznego - oś obojętna - stanowi miejsce geometryczne punktów, w których wartości naprężeń normalnych spełniają równanie:

$$\sigma_x = 0.$$

Podstawiając do niego wyrażenie (14.2), a następnie dokonując kolejnych przekształceń dostajemy równanie osi obojętnej dla rozważanego przypadku:

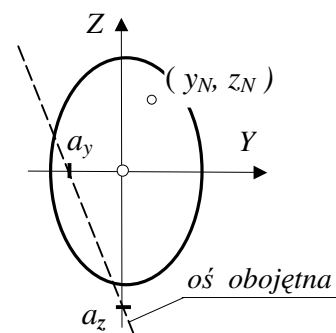
$$\frac{N}{A} + \frac{N z_N}{J_y} z + \frac{N y_N}{J_z} y = 0 \rightarrow 1 + \frac{z_N}{J_y/A} z + \frac{y_N}{J_z/A} y = 0 \rightarrow \frac{z_N}{i_y^2} z + \frac{y_N}{i_z^2} y = -1$$

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1, \quad (14.3)$$

$$\text{gdzie: } a_y = -\frac{i_z^2}{y_N}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_N},$$

to odcinki jakie oś obojętna odcina na osiach głównych centralnych (patrz rys.14.2), a

$i_y^2 = \frac{J_y}{A}$ oraz $i_z^2 = \frac{J_z}{A}$ - kwadraty głównych centralnych promieni bezwładności przekroju poprzecznego.



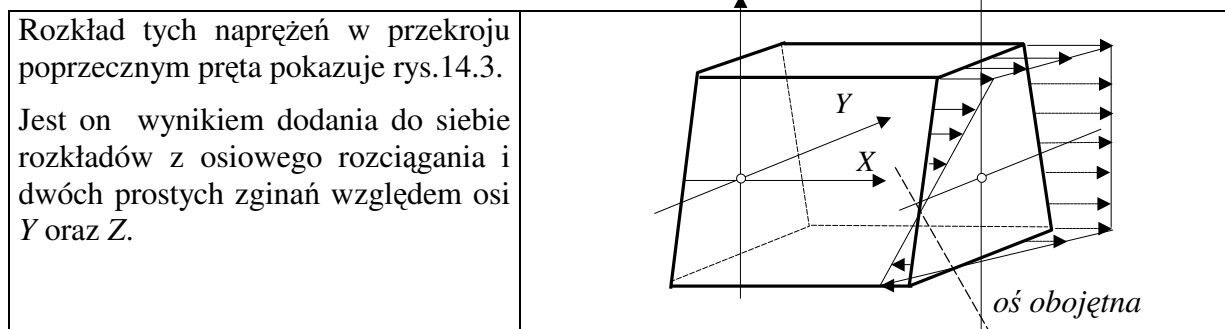
Rys. 14.2

Analizując równanie osi obojętnej (14.3) spostrzegamy, że w przypadku mimośrodowego rozciągania:

- położenie osi obojętnej nie zależy od wartości siły obciążającej N ,

- oś obojętna nie przechodzi przez środek ciężkości przekroju poprzecznego, a odcinki jakie odcina na osiach układu współrzędnych znajdują się w jego ćwiartce po przeciwnej stronie punktu przyłożenia siły,
- położenie osi obojętnej zależy od współrzędnych punktu przyłożenia siły obciążającej i geometrii przekroju poprzecznego.

Naprężenia normalne σ_x osiągają wartości ekstremalne w punktach przekroju poprzecznego najdalej położonych od osi obojętnej.



Rys.14.3

14.3. Wymiarowanie prętów mimośrodowo rozciąganych lub ścispanych

Ograniczymy się, jak poprzednio tylko do wymiarowania ze względu na stan graniczny nośności przyjmując, że będzie on osiągnięty jeśli przynajmniej w jednym punkcie przekroju poprzecznego wielkość naprężenia normalnego będzie równa wytrzymałości obliczeniowej. Jeśli pręt wykonany jest z materiału, którego wytrzymałości obliczeniowe przy rozciąganiu R_r i ścisnieniu R_c , są różne to warunek stanu granicznego nośności stanowią nierówności:

$$\max \sigma_{xr} \leq R_r \quad \text{i} \quad \max |\sigma_{xc}| \leq R_c$$

gdzie: $\max \sigma_{xr}$ i $\max |\sigma_{xc}|$ - największe naprężenia rozciągające i ścispanych w przekroju poprzecznym.

W przypadku materiału o tej samej wytrzymałości obliczeniowej na rozciąganie i ściskanie (materiał izonomiczny) warunek wymiarowania będzie jeden:

$$\max |\sigma_x| \leq R.$$

W przypadku materiału o tej samej wytrzymałości obliczeniowej na rozciąganie i ściskanie (materiał izonomiczny) warunek wymiarowania będzie jeden:

$$\max |\sigma_x| \leq R.$$

Gdy przekrój poprzeczny pręta ma dwie osie symetrii i obrys zewnętrzny jego kształtu jest prostokątny np. dwuteownik, prostokąt z wyciętymi otworami itp., to maksymalne naprężenia normalne wystąpi w narożu po przeciwnej stronie osi obojętnej i będzie miało wartość:

$$\max |\sigma_x| = \frac{|N|}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}.$$

W tym miejscu ponownie należy podkreślić, że w przypadku mimośrodowego ściskania konieczne jest spełnienie warunków pozwalających na przyjęcie zasady zeszywnienia, co ogranicza zastosowanie wyprowadzonych zależności do krępych prętów.

13.4. Rdzeń przekroju

Jak już wyżej powiedziano, w przypadku mimośrodowego rozciągania lub ściskania oś obojętna nie przechodzi przez środek ciężkości przekroju poprzecznego, jej położenie nie zależy od wielkości siły obciążającej i określa je równanie odcinkowe prostej (14.3):

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1.$$

Dowiedziemy dwóch prostych twierdzeń o osi obojętnej wynikających z tego równania.

Twierdzenie 1: oddalaniu się punktu przyłożenia siły od środka ciężkości przekroju poprzecznego towarzyszy przybliżanie się osi obojętnej do środka ciężkości i odwrotnie.

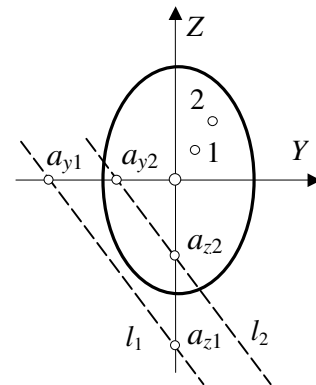
Niech punkt 1 (rys.14.4) o współrzędnych (y_{N1}, z_{N1}) określa początkowe przyłożenie siły, a

$$a_{y1} = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} \quad \text{oraz} \quad a_{z1} = -\frac{i_y^2}{z_{N1}}$$

położenie odpowiadającej mu osi obojętnej l_1 . Niech punkt 2 o współrzędnych (y_{N2}, z_{N2}) określa nowe przyłożenie siły, a

$$a_{y2} = -\frac{i_z^2}{y_{N2}} \quad \text{oraz} \quad a_{z2} = -\frac{i_y^2}{z_{N2}}$$

osi obojętnej l_2 .



Rys. 14.4

Ponieważ $y_{N2} > y_{N1}$ oraz $z_{N2} > z_{N1}$ to $|a_{y2}| < |a_{y1}|$ oraz $|a_{z2}| < |a_{z1}|$, co dowodzi prawdziwości twierdzenia 1.

Twierdzenie 2: obrotowi osi obojętnej wokół ustalonego punktu odpowiada przemieszczanie się punktu przyłożenia siły po prostej.

Niech punkt A o współrzędnych (y_A, z_A) (rys.14.5) leży na osi obojętnej l odpowiadającej przyłożeniu siły w punkcie 1 o współrzędnych (y_N, z_N) .

Współrzędne obu punktów spełniają równanie osi obojętnej (14.3)

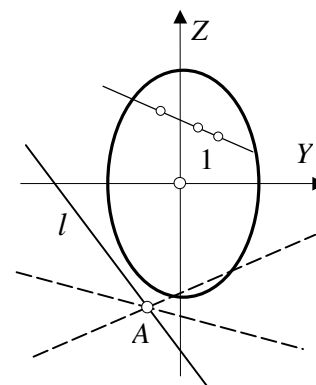
$$\frac{y_A}{(-i_z^2/y_N)} + \frac{z_A}{(-i_y^2/z_N)} = 1.$$

Jeśli przekształcimy to równanie do postaci:

$$\frac{y_N}{(-i_z^2/y_A)} + \frac{z_N}{(-i_y^2/z_A)} = 1$$

w którym współrzędne (y_A, z_A) będą ustalone, to widać, że współrzędne punktów przyłożenia siły (y_N, z_N) spełniają równanie prostej co dowodzi słuszności twierdzenia 2.

W przypadku mimośrodowego rozciągania i ściskania naprężenia normalne w przekroju mogą być jednakowego lub różnych znaków. Będą one miały we wszystkich punktach



Rys. 14.5

przekroju ten sam znak jedynie wtedy, gdy oś obojętna – której położenie zależy od współrzędnych położenia wypadkowej sił obciążających – będzie leżała poza przekrojem lub była styczna do niego. Miejsce geometryczne punktów przekroju poprzecznego pręta w których przyłożona siła, równoległa do jego osi wywołuje naprężenia normalne jednego znaku w całym przekroju nazywać będziemy rdzeniem przekroju. Zagadnienie wyznaczenia rdzenia przekroju ma istotne znaczenie praktyczne w przypadku prętów mimośrodowo ściskanych wykonanych z materiałów o niewielkiej wytrzymałości na rozciąganie (np. słupy betonowe czy filary ceglane). Takie konstrukcje dobrze jest kształtować w formie zapewniającej położenie wypadkowej siły ściskającej wewnątrz rdzenia przekroju, co zapewnia występowanie jedynie naprężeń ściskających. Wyznaczenie rdzenia przekroju prześledzimy (nie tracąc ogólności rozważań) na przykładzie pokazanym na rys.14.6.

Po wyznaczeniu głównych centralnych osi bezwładności (Y, Z) i wartości ich promieni bezwładności i_y oraz i_z prowadzimy styczną 1-1 uważając ją za oś obojętną. Styczna 1-1 odcina na osiach układu współrzędnych odcinki a_{y1} oraz a_{z1} .

Współrzędne punktu 1 przyłożenia siły, któremu odpowiada oś obojętna 1-1 wyznaczamy wykorzystując zależności (14.4) występujące w ogólnym równaniu osi obojętnej

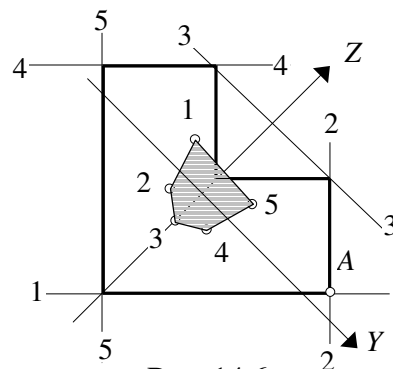
$$y_{N1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}}, \quad z_{N1} = -\frac{i_y^2}{a_{z1}}.$$

Powtarzając rozumowanie dla kolejnych stycznych do obrysu przekroju dostajemy punkty 2, 3, 4 i 5, które są punktami krzywej rdzeniowej tzn. krzywej o tej własności, że przyłożenie siły w jej punktach daje osie obojętne, styczne do przekroju. Całą krzywą rdzeniową otrzymujemy łącząc te punkty odcinkami prostych. Wynika to z *twierdzenia 2* bo od osi obojętnej 1-1 do osi obojętnej 2-2 przechodzimy obracając je wokół punktu A, temu zaś zgodnie z tym twierdzeniem towarzyszy przesuwanie się punktu przyłożenia siły po prostej. Punktom przyłożenia siły wewnątrz krzywej rdzeniowej odpowiadają osie obojętne poza przekrojem i wynika to z *twierdzenia 1* o oddalaniu się osi od środka ciężkości jeśli siła zbliża się do niego. Zatem rdzeń przekroju w analizowanym przypadku stanowi ten zacieniony obszar.

Z opisanej metody konstrukcji rdzenia wynika kilka prostych wskazówek odnośnie kształtu rdzenia dla przekrojów ograniczonych odcinkami prostych:

- rdzeń jest figurą wypukłą
- ma tyle boków, ile boków ma najmniejszy wielobok opisany na przekroju
- jest figurą symetryczną dla symetrycznego przekroju.

W przypadku przekrojów o brzegu krzywoliniowym, równanie stycznej do brzegu razem ze znanym równaniem brzegu i zależnościami (14.4) pozwala na napisanie równania krzywej rdzeniowej i tym samym wyznaczenie ich rdzenia przekroju.



Rys. 14.6

14.5. Przykłady

Przykład 14.5.1. Drewniany słup o przekroju prostokątnym $b \times h = 20 \times 36$ cm i niewielkiej wysokości obciążony jest w narożu siłą ściskającą $P = 100$ kN. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym słupa i położenie osi obojętnej.

Rozwiązanie

Występuje tu klasyczny przypadek mimośrodowego ściskania, w którym przy przyjętym układzie osi odniesienia (to osie główne centralne przekroju poprzecznego):

$$N = -100 \text{ kN}, \quad y_N = b/2 = 10 \text{ cm}, \quad z_N = h/2 = 18 \text{ cm},$$

$$A = b h = 20 * 36 = 720 \text{ cm}^2,$$

$$J_y = b h^3 / 12 = 20 * 36^3 / 12 = 77760 \text{ cm}^4,$$

$$J_z = h b^3 / 12 = 36 * 20^3 / 12 = 24000 \text{ cm}^4,$$

$$i_y^2 = J_y / A = 77760 / 720 = 108 \text{ cm}^2,$$

$$i_z^2 = J_z / A = 24000 / 720 = 33.33 \text{ cm}^2.$$

Naprężenia normalne określa zależność:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N z_N}{J_y} z + \frac{N y_N}{J_z} y,$$

która, po podstawieniu wyżej otrzymanych wartości, przyjmuje formę:

$$\sigma_x = (-1.389 - 23.148 z - 41.667 y) * 10^6.$$

Wartości naprężeń w narożach są równe:

$$\sigma_{x,1} = [-1.389 - 23.148(0.18) - 41.667(0.10)] * 10^6 = -9.722 \text{ MPa},$$

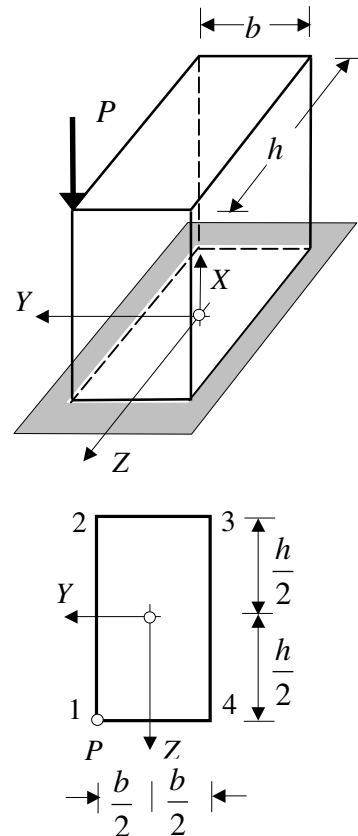
$$\sigma_{x,2} = [-1.389 - 23.148(-0.18) - 41.667(0.10)] * 10^6 = -1.389 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x,3} = [-1.389 - 23.148(-0.18) - 41.667(-0.10)] * 10^6 = 6.944 \text{ MPa},$$

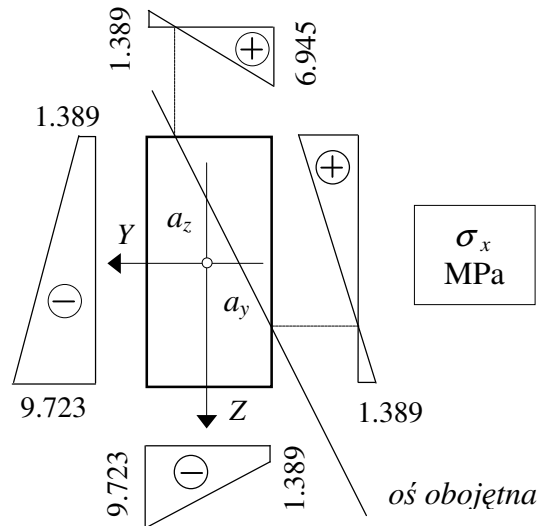
$$\sigma_{x,4} = [-1.389 - 23.148(0.18) - 41.667(-0.10)] * 10^6 = -1.389 \text{ MPa}.$$

Oś obojętna jest prostą o równaniu:

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1$$

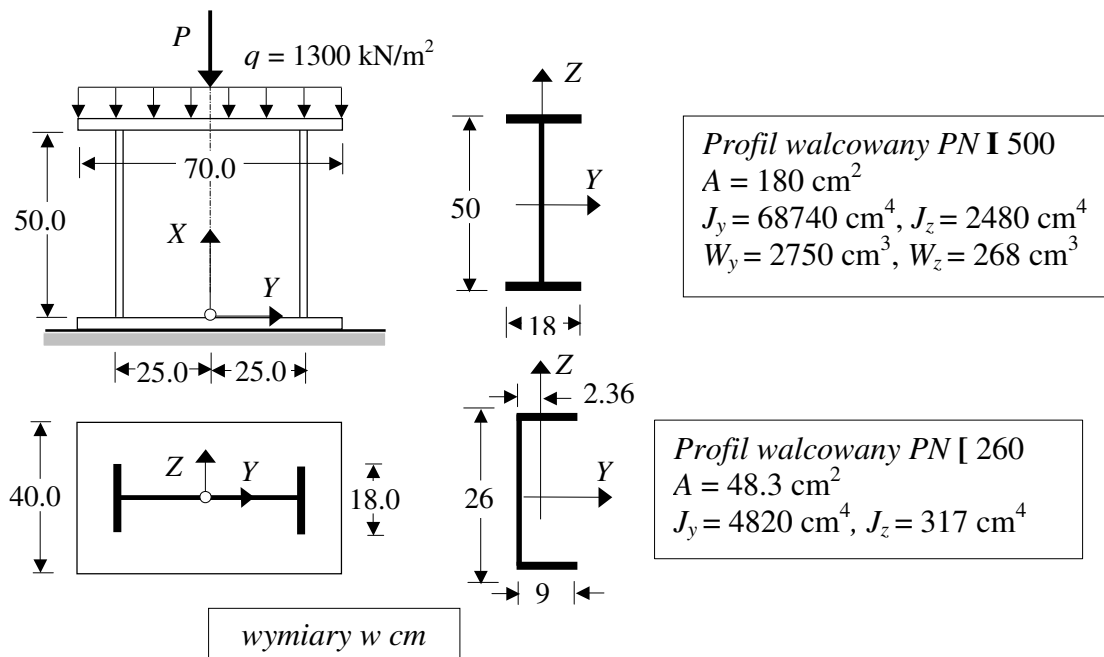


w którym $a_y = -\frac{i_z^2}{y_N} = -\frac{33.33}{10} = -3.33 \text{ cm}$ oraz $a_z = -\frac{i_y^2}{z_N} = -\frac{108}{18} = -6.00 \text{ cm}$ to odcinki jakie ta prosta odcina na głównych centralnych osiach bezwładności przekroju poprzecznego. Rozkład naprężeń pokazuje poniższy rysunek.



Przykład 14.5.2. Stalowy słupek wykonany z dwuteownika I 500 pokazany na rysunku, przenosił osiowo równomiernie rozłożone obciążenie $q = 13 \text{ MN/m}^2$ ze sztywnej żeliwnej płyty o wymiarach $b \times h = 0.7 \times 0.4 \text{ m}$. Słupek postanowiono wzmocnić przyspawanym ceownikiem I 260 na całej jego wysokości.

Sprawdzić jak zmieniają się wartości naprężeń normalnych w wyniku wzmocnienia, wyznaczyć wykresy naprężeń normalnych w przekrojach słupka przed i po wzmocnieniu.



Rozwiązanie

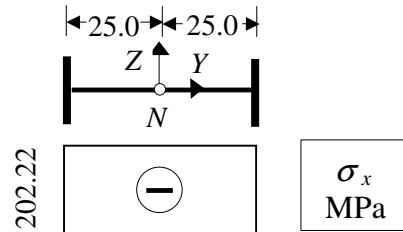
Wypadkowa obciążenia działająca na słupek

$$P = qbh = 13 * 0.7 * 0.4 = 3.64 \text{ MN.}$$

Stan przed wzmocnieniem

Słupek jest ściskany osiowo siłą podłużną $N = -3.64 \text{ MN}$ i naprężenia normalne w każdym punkcie jego przekroju są równe:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = -\frac{3.64}{180 * 10^{-4}} = -202.22 \text{ MPa.}$$



Stan po wzmocnieniu

Należy wyznaczyć położenie głównych centralnych osi wzmocnionego przekroju. Oś Y nie zmieni położenia.

Położenie środka ciężkości wzmocnionego przekroju

$$A = 180 + 48.3 = 228.3 \text{ cm}^2,$$

$$S_{z_0} = 48.3 * (-27.36) = -1321.49 \text{ cm}^3,$$

$$y_0 = \frac{S_{z_0}}{A} = \frac{-1321.49}{228.3} = -5.79 \text{ cm.}$$

Ponieważ położenie wypadkowej obciążenia nie zmieniło się mamy teraz do czynienia z mimośrodowym ścisaniem w którym siła na mimośrodku 5.79 cm powoduje zginanie względem osi Z momentem o wartości:

$$M_z = 3.64 * 5.79 * 10^{-2} = 0.211 \text{ MNm.}$$

Moment bezwładności przekroju względem osi zginania:

$$J_z = 68740 + 180 * 5.79^2 + 317 + 48.3 * (-21.57)^2 = 97564 \text{ cm}^4$$

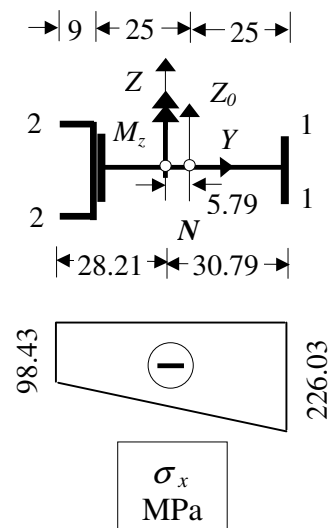
Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} y$$

Wartości naprężeń we włóknach skrajnych wynoszą:

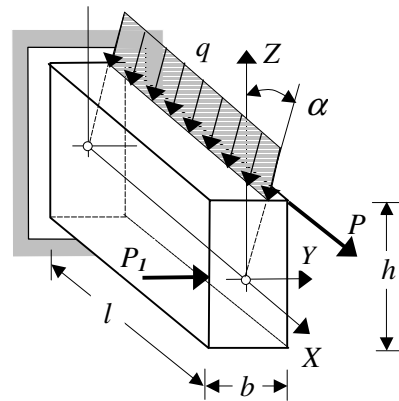
$$\sigma_x^{1-1} = \frac{-3.64}{228.3 * 10^{-4}} - \frac{0.211}{97564 * 10^{-8}} (0.3079) = -226.03 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_x^{2-2} = \frac{-3.64}{228.3 * 10^{-4}} - \frac{0.211}{97564 * 10^{-8}} (-0.2821) = -98.43 \text{ MPa.}$$



Wyniki obliczeń dowodzą, że planowane wzmocnienie pogorszy stan mechaniczny słupka, powodując zwiększenie naprężeń normalnych.

Przykład 14.5.3. Belka wspornikowa o przekroju prostokątnym $b \times h = 0.12 \times 0.24$ m i długości $l = 2.0$ m obciążona jest, jak na rysunku, obciążeniem ciągłym $q = 2.0$ kN/m, działającym w płaszczyźnie nachylonej pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do płaszczyzny (X, Z) oraz dwiema siłami skupionymi $P = 20.0$ kN i $P_1 = 1.0$ kN. W przekroju utwierdzenia wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych i stycznych oraz położenie osi obojętnej.



Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy, wykorzystując zasadę superpozycji sumując momenty zginające, siły poprzeczne i podłużne w przekroju utwierdzenia od poszczególnych obciążeń.

Obciążenie ciągłe q

Składowe obciążenia ciągłego q wynoszą:

$$q_y = q \sin \alpha = 2.0 * 0.500 = 1.00 \text{ kN/m},$$

$$q_z = q \cos \alpha = 2.0 * 0.866 = 1.73 \text{ kN/m}.$$

W przekroju utwierdzenia daje ono dwa momenty zginające:

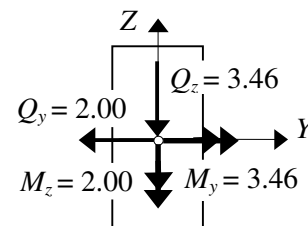
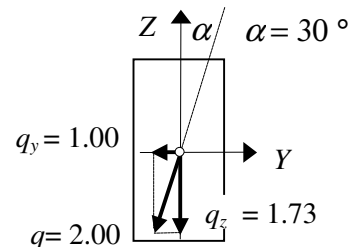
$$M_y = q_z * 2 * 1 = 1.73 * 2 = 3.46 \text{ kNm},$$

$$M_z = q_y * 2 * 1 = 1 * 2 = 2.00 \text{ kNm},$$

oraz dwie siły poprzeczne:

$$Q_y = q_y * 2 = 1 * 2 = 2.00 \text{ kN},$$

$$Q_z = q_z * 2 = 1.73 * 2 = 3.46 \text{ kN}.$$



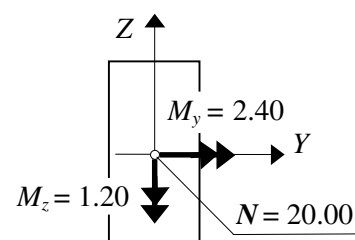
Siła skupiona P

Siła rozciągająca P , równoległa do osi pręta, jest zaczepiona w narożu i daje momenty zginające:

$$M_y = P h / 2 = 20 * 0.12 = 2.40 \text{ kNm},$$

$$M_z = P b / 2 = 20 * 0.06 = 1.20 \text{ kNm},$$

oraz siłę podłużną $N = 20.00$ kN.

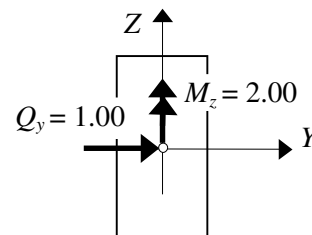


Siła skupiona P_1

Siła skupiona P_1 działająca w płaszczyźnie (X, Y) , prostopadła do osi pręta daje moment zginający:

$$M_z = P_1 * 2 = 2.00 \text{ kNm},$$

oraz siłę poprzeczną $Q_y = 1.00$ kN.



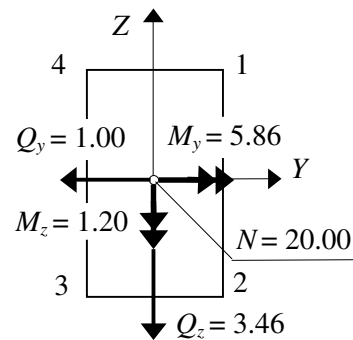
W wyniku sumowania w przekroju utwierdzenia otrzymujemy:

- siłę podłużną N i dwa momenty zginające M_y oraz M_z które to siły przekrojowe generują naprężenia normalne:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y$$

- dwie siły poprzeczne, które generują naprężenia styczne:

$$\tau_{xy} = -\frac{Q_y S_z(y)}{J_z h(y)} \quad \text{oraz} \quad \tau_{xz} = -\frac{Q_z S_y(z)}{J_y b(y)}$$



Charakterystyki geometryczne przekroju są równe:

$$A = bh = 12 * 24 = 288 \text{ cm}^2,$$

$$J_y = bh^3/12 = 12 * 24^3/12 = 13824 \text{ cm}^4, \quad J_z = hb^3/12 = 24 * 12^3/12 = 3456 \text{ cm}^4,$$

$$W_y = bh^2/6 = 12 * 24^2/6 = 1152 \text{ cm}^3, \quad W_z = hb^2/6 = 24 * 12^2/6 = 576 \text{ cm}^3$$

Naprężenia normalne w narożach wynoszą:

$$\sigma_{x1} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{20 * 10^3}{288 * 10^{-4}} + \frac{5.86 * 10^3}{1152 * 10^{-6}} + \frac{1.20 * 10^3}{576 * 10^{-6}} = 7.865 * 10^6 \text{ Pa},$$

$$\sigma_{x2} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{20 * 10^3}{288 * 10^{-4}} - \frac{5.86 * 10^3}{1152 * 10^{-6}} + \frac{1.20 * 10^3}{576 * 10^{-6}} = -2.309 * 10^6 \text{ Pa},$$

$$\sigma_{x3} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = \frac{20 * 10^3}{288 * 10^{-4}} - \frac{5.86 * 10^3}{1152 * 10^{-6}} - \frac{1.20 * 10^3}{576 * 10^{-6}} = -6.476 * 10^6 \text{ Pa},$$

$$\sigma_{x4} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = \frac{20 * 10^3}{288 * 10^{-4}} + \frac{5.86 * 10^3}{1152 * 10^{-6}} - \frac{1.20 * 10^3}{576 * 10^{-6}} = 3.698 * 10^6 \text{ Pa}.$$

Równanie osi obojętnej:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{20 * 10^3}{288 * 10^{-4}} + \frac{5.86 * 10^3}{13824 * 10^{-8}} z + \frac{1.20 * 10^3}{3456 * 10^{-8}} y = 0,$$

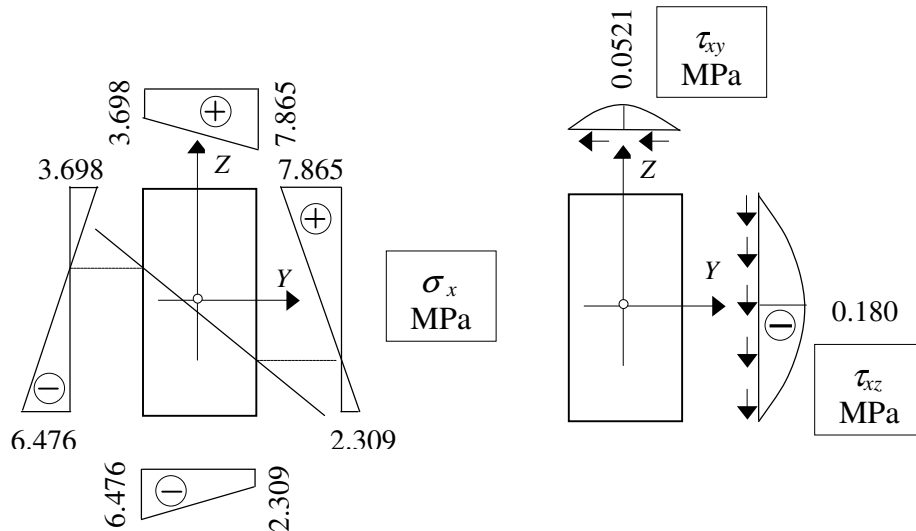
$$z = -0.0164 - 0.818y.$$

W przekroju prostokątnym naprężenia styczne mają rozkład paraboliczny i osiągają maksymalną wartość $3Q/2A$ w punktach na osi zginania, stąd:

$$\max |\tau_{xy}| = \frac{3Q_y}{2A} = \frac{3 * 1 * 10^3}{2 * 288 * 10^{-4}} = 0.0521 * 10^6 \text{ Pa},$$

$$\max |\tau_{xz}| = \frac{3Q_z}{2A} = \frac{3 * 3.46 * 10^3}{2 * 288 * 10^{-4}} = 0.180 * 10^6 \text{ Pa.}$$

Rozkłady naprężeń normalnych i stycznych pokazują poniższe rysunki:



Przykład 14.5.4. Obliczyć minimalną grubość a betonowej ściany zbiornika wodnego (patrz rysunek), przy której u jej podstawy nie będą występowały naprężenia rozciągające. Na ścianę o wysokości $h_s = 8$ m oprócz parcia wody działa w jej płaszczyźnie środkowej pionowe obciążenie $q = 50$ kN/m. Wysokość słupa wody $h_w = 6$ m. W obliczeniach należy uwzględnić ciężar własny ściany wykonanej z materiału o ciężarze objętościowym $\gamma_b = 22$ kN/m³. Ciężar objętościowy wody $\gamma_w = 10$ kN/m³.

Rozwiązanie

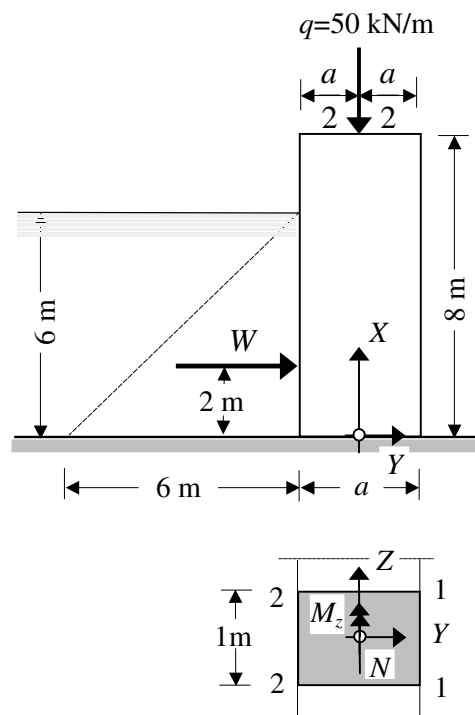
Obliczenia wykonujemy na 1m długości ściany. Wpierw zredukujemy obciążenia działające na ścianę do środka ciężkości jej przekroju u podstawy.

Obciążenie pionowe stanowi sumę obciążenia zewnętrznego oraz ciężaru własnego i działa ono w środku ciężkości.

$$P = q * 1 + a * 1 * h_s * \gamma_b = 50 + a * 8 * 22 = 176a + 50$$

Obciążenie poziome wynikające z parcia wody zaczepione jest w środku ciężkości trójkąta parcia i wynosi:

$$W = \frac{1 * h_w^2}{2} \gamma_w = \frac{6^2}{2} * 10 = 180 \text{ kN.}$$



Obciążenie to daje u podstawy ściany moment:

$$M_z = W * \frac{h_w}{3} = 180 * 2 = 360 \text{ kNm.}$$

W rezultacie przekrój u podstawy ściany obciążony jest osiowo siłą ścisającą $N = -(176a + 50)$ i momentem $M_z = 360 \text{ kNm}$ (w wyniku redukcji w przekroju występuje jeszcze siła pozioma W ale nie wywołuje ona naprężeń normalnych).

Naprężenia normalne w przekroju podstawy ściany wyznaczmy ze wzoru:

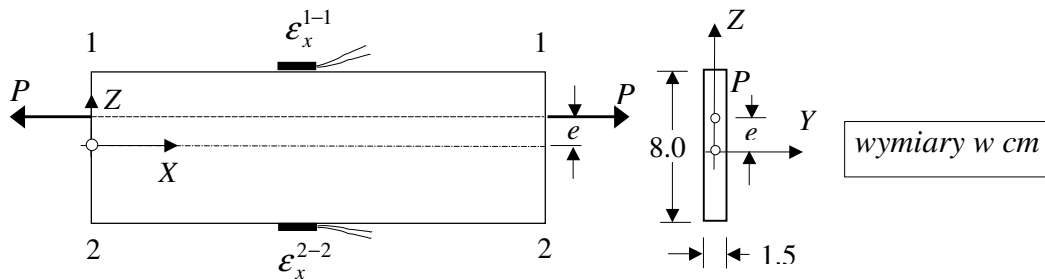
$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{J_z} y,$$

gdzie: $A = a * 1$ oraz $J_z = 1 * a^3 / 12$.

Po stronie 1-1 na pewno wystąpią naprężenia ścisające, po stronie 2-2 mogą wystąpić naprężenia rozciągające (na skutek działania momentu M_z). Aby je wyzerować należy wykonać ścianę o grubości a spełniającej relację:

$$\sigma_x^{2-2} = \frac{-(176a + 50) * 10^3}{a} - \frac{360 * 10^3}{a^3 / 12} (-a/2) = 0 \rightarrow a = 3.37 \text{ m.}$$

Przykład 14.5.5. Pomiary tensometryczne wykazały, że odkształcenia liniowe we włóknach skrajnych 1-1 oraz 2-2 mimośrodowo rozciąganego pręta stalowego o przekroju prostokątnym wynoszą, odpowiednio, $\epsilon_x^{1-1} = 8 * 10^{-4}$ i $\epsilon_x^{2-2} = 1 * 10^{-4}$. Zakładając, że moduł Younga stali $E = 205 \text{ GPa}$ wyznaczyc wartości siły P oraz mimośrodu e .



Rozwiązanie

Naprężenia normalne we włóknach skrajnych wynoszą:

$$\sigma_x^{1-1} = E \epsilon_x^{1-1} = 205 * 10^9 * 8 * 10^{-4} = 164 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_x^{2-2} = E \epsilon_x^{2-2} = 205 * 10^9 * 1 * 10^{-4} = 20.5 \text{ MPa.}$$

W analizowanym przypadku występuje mimośrodowe rozciąganie na mimośrodku e względem osi Y lub, inaczej osiowe rozciąganie siłą $N = P$ oraz zginanie względem osi Y momentem $M_y = P e$.

Ponieważ mamy wyznaczone naprężenia we włóknach skrajnych to możemy zastosować wzory:

$$\sigma_x^{1-1} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_y}, \quad \sigma_x^{2-2} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} = \frac{P}{A} - \frac{Pe}{W_y}.$$

Podstawiając do nich $A = 8 \cdot 1.5 \cdot 10^{-4} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ i $W_y = \frac{1.5 \cdot 8^2 \cdot 10^{-6}}{6} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, otrzymujemy układ równań z którego możemy wyznaczyć poszukiwane wartości P oraz e :

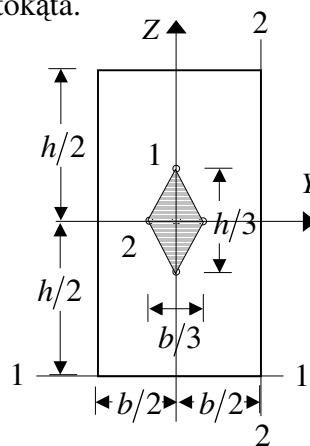
$$\begin{cases} 164 \cdot 10^6 = \frac{P}{12 \cdot 10^{-4}} + \frac{Pe}{16 \cdot 10^{-6}} \\ 20.5 \cdot 10^6 = \frac{P}{12 \cdot 10^{-4}} - \frac{Pe}{16 \cdot 10^{-6}} \end{cases} \rightarrow P = 110.70 \cdot 10^3 \text{ N}, \quad e = 1.04 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Przykład 14.5.6. Wyznaczyć rdzeń przekroju dla prostokąta.

Rozwiązanie

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{bh^3/12}{bh} = \frac{h^2}{12},$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{hb^3/12}{bh} = \frac{b^2}{12}.$$



Punkty krzywej rdzeniowej:
oś obojętna 1-1

$$a_{y1} = \infty, \quad y_{N1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}} = -\frac{b^2/12}{\infty} = 0; \quad a_{z1} = -\frac{h}{2}, \quad z_{N1} = -\frac{i_y^2}{a_{z1}} = -\frac{h^2/12}{-h/2} = \frac{h}{6}.$$

oś obojętna 2-2

$$a_{y2} = \frac{b}{2}, \quad y_{N2} = -\frac{i_z^2}{a_{y2}} = -\frac{b^2/12}{b/2} = -\frac{b}{6}; \quad a_{z2} = \infty, \quad z_{N2} = -\frac{i_y^2}{a_{z2}} = -\frac{h^2/12}{\infty} = 0.$$

Pozostałe punkty symetrycznie.

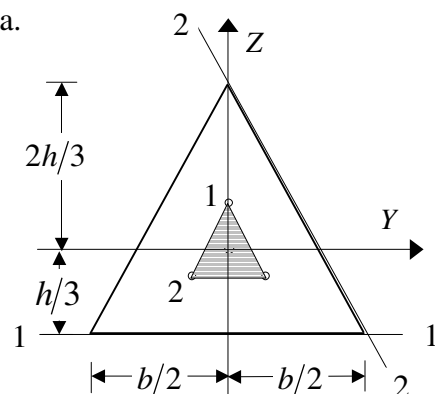
Przykład 14.5.7. Wyznaczyć rdzeń przekroju dla trójkąta.

Rozwiązanie

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{bh^3/36}{bh/2} = \frac{h^2}{18},$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{hb^3/48}{bh/2} = \frac{b^2}{24}.$$

Punkty krzywej rdzeniowej:



oś obojętna 1-1

$$a_{y1} = \infty, \quad y_{N1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}} = -\frac{b^2/24}{\infty} = 0; \quad a_{z1} = -\frac{h}{3}, \quad z_{N1} = -\frac{i_y^2}{a_{z1}} = -\frac{h^2/18}{-h/3} = \frac{h}{6}.$$

oś obojętna 2-2

$$a_{y2} = \frac{b}{3}, \quad y_{N2} = -\frac{i_z^2}{a_{y2}} = -\frac{b^2/24}{b/3} = -\frac{b}{8}; \quad a_{z2} = \frac{2h}{3}, \quad z_{N2} = -\frac{i_y^2}{a_{z2}} = -\frac{h^2/18}{2h/3} = -\frac{h}{12}.$$

Pozostałe punkty symetrycznie.

Przykład 14.5.8. Wyznaczyć rdzeń dla podanego przekroju.

Rozwiązanie

Osie symetrii (Y, Z) są osiami głównymi centralnymi.

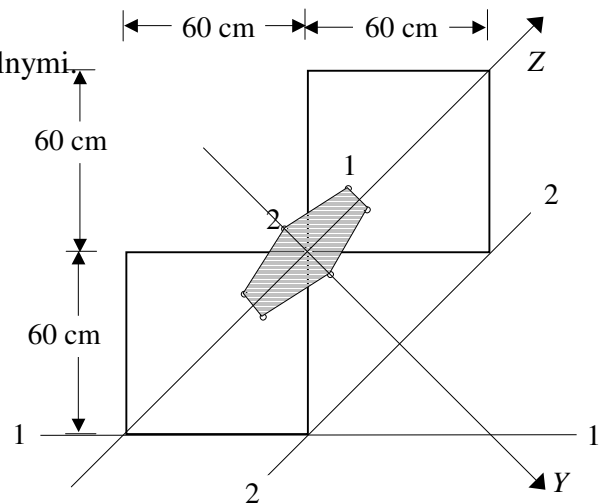
$$A = 2 * 60^2 = 72 * 10^2 \text{ cm}^2,$$

$$J_y = \frac{120^4}{12} - 2 \frac{60^4}{12} = 1512 * 10^4 \text{ cm}^4,$$

$$J_z = 2 \frac{60^4}{12} = 216 * 10^4 \text{ cm}^4,$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{1512 * 10^4}{72 * 10^2} = 2100 \text{ cm}^2,$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{216 * 10^4}{72 * 10^2} = 300 \text{ cm}^2.$$



Punkty krzywej rdzeniowej:

oś obojętna 1-1

$$a_{y1} = 60\sqrt{2} = 84.85 \text{ cm}, \quad y_{N1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}} = -\frac{300}{84.85} = -3.54 \text{ cm},$$

$$a_{z1} = -60\sqrt{2} = -84.85 \text{ cm}, \quad z_{N1} = -\frac{i_y^2}{a_{z1}} = -\frac{2100}{-84.85} = 24.75 \text{ cm}.$$

oś obojętna 2-2

$$a_{y2} = 60\sqrt{2}/2 = 42.43 \text{ cm}, \quad y_{N2} = -\frac{i_z^2}{a_{y2}} = -\frac{300}{42.43} = -7.07 \text{ cm},$$

$$a_{z2} = \infty, \quad z_{N2} = -\frac{i_y^2}{a_{z2}} = -\frac{2100}{\infty} = 0.$$

Pozostałe punkty symetrycznie.

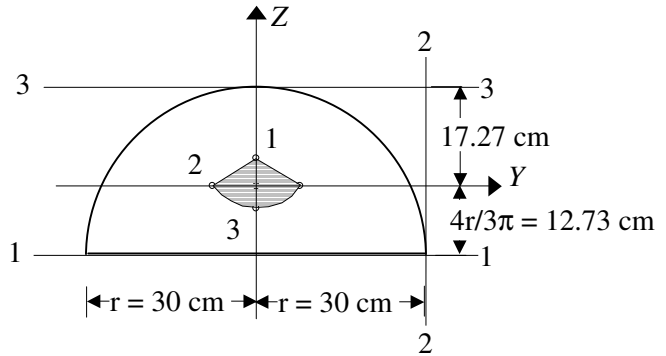
Przykład 13.5.9. Wyznaczyć rdzeń dla półkola.

Rozwiązanie

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{0.11r^4}{\pi r^2/2} = \frac{0.11 \cdot 30^4}{\pi 30^2/2} = 63.03 \text{ cm}^2,$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{\pi r^4/8}{\pi r^2/2} = \frac{\pi 30^4/8}{\pi 30^2/2} = 225.00 \text{ cm}^2.$$

Punkty krzywej rdzeniowej



oś obojętna 1-1

$$a_{y1} = \infty, \quad y_{N1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}} = -\frac{225.00}{\infty} = 0,$$

$$a_{z1} = -4r/3\pi = -4 \cdot 30/3\pi = -12.73 \text{ cm}, \quad z_{N1} = -\frac{i_y^2}{a_{z1}} = -\frac{63.03}{-12.73} = 4.95 \text{ cm}.$$

oś obojętna 2-2

$$a_{y2} = r = 30.00 \text{ cm}, \quad y_{N2} = -\frac{i_z^2}{a_{y2}} = -\frac{225.00}{30.00} = -7.50 \text{ cm},$$

$$a_{z2} = \infty, \quad z_{N2} = -\frac{i_y^2}{a_{z2}} = -\frac{63.03}{\infty} = 0.$$

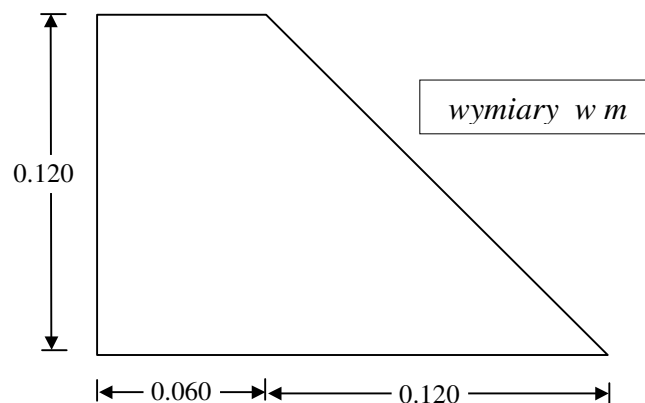
oś obojętna 3-3

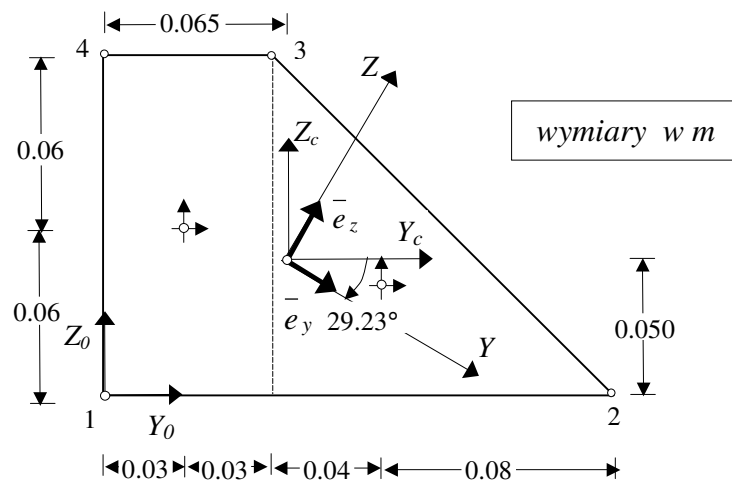
$$a_{y2} = \infty, \quad y_{N2} = -\frac{i_z^2}{a_{y2}} = -\frac{225.00}{\infty} = 0$$

$$a_{z2} = r - \frac{4r}{3\pi} = 30 - \frac{4 \cdot 30}{3\pi} = 17.27 \text{ cm}, \quad z_{N2} = -\frac{i_y^2}{a_{z2}} = -\frac{63.03}{17.27} = -3.65 \text{ cm}.$$

Krzywa rdzeniowa między punktami 2 i 3 nie jest prostą (jest połową elipsy) gdyż od osi obojętnej 2-2 do osi 3-3 przechodzimy ze stycznymi do brzegu w punktach styczności zmieniającymi zmieniającymi na nim swe położenie.

Przykład 14.5.10. Wyznaczyć rdzeń dla podanego przekroju.



Rozwiązanie**Charakterystyki geometryczne przekroju****Pole powierzchni i środek ciężkości**

$$\begin{aligned}
 A &= 0.12 \cdot 0.06 + 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 = 144 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \\
 S_{y_0} &= 0.12 \cdot 0.06 \cdot 0.06 + 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.120 \cdot 0.04 = 720 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3, \\
 S_{z_0} &= 0.12 \cdot 0.06 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot 0.10 = 936 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3, \\
 y_0 &= S_{z_0} / A = 936 \cdot 10^{-6} / 144 \cdot 10^{-4} = 0.065 \text{ m}, \\
 z_0 &= S_{y_0} / A = 720 \cdot 10^{-6} / 144 \cdot 10^{-4} = 0.050 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Momenty bezwładności względem osi centralnych

$$\begin{aligned}
 J_{y_c} &= 0.06 \cdot 0.12^3 / 12 + 0.12 \cdot 0.06 \cdot 0.01^2 + 0.12 \cdot 0.12^3 / 36 + \\
 &\quad 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot (-0.01)^2 = 1584 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \\
 J_{z_c} &= 0.12 \cdot 0.06^3 / 12 + 0.12 \cdot 0.06 \cdot (-0.035)^2 + 0.12 \cdot 0.12^3 / 36 + \\
 &\quad 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot 0.035^2 = 2556 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4, \\
 J_{y_{czc}} &= 0.12 \cdot 0.06 \cdot (-0.035) \cdot 0.01 - 0.12^2 \cdot 0.12^2 / 72 + \\
 &\quad 0.5 \cdot 0.12 \cdot 0.12 \cdot 0.035 \cdot (-0.01) = -792 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4.
 \end{aligned}$$

Osie główne centralne i momenty bezwładności względem tych osi

$$J_{1,2} = \frac{J_{y_c} + J_{z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{z_c}}{2}\right)^2 + J_{y_{czc}}^2} = \frac{1584 \cdot 10^{-8} + 2556 \cdot 10^{-8}}{2} \pm$$

$$\sqrt{\left(\frac{1584 \cdot 10^{-8} - 2556 \cdot 10^{-8}}{2}\right)^2 + (-792 \cdot 10^{-8})^2}$$

$$J_1 = J_z = 2999.23 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4; \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A} = 20.828 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$J_2 = J_y = 1140.77 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = 7.922 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{yczc}}{J_{zc} - J_1} = \frac{-792}{2556 - 2999.23} = 1.7869 \rightarrow \alpha_1 = 60.77^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{yczc}}{J_{zc} - J_2} = \frac{-792}{2556 - 1140.77} = -0.5596 \rightarrow \alpha_2 = -29.23^\circ.$$

Sprawdzenia:

$$J_{yc} + J_{zc} = J_y + J_z; \quad (2556 + 1584) \cdot 10^{-8} = (1140.77 + 2999.23) \cdot 10^{-8} \text{ m}^4,$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = 29.23^\circ + 60.77^\circ = 90^\circ.$$

Wyznaczenie współrzędnych punktów krzywej rdzeniowej

Rdzeń definiowany jest w układzie osi głównych centralnych (Y, Z), należy zatem wyznaczyć współrzędne punktów jego konturu w tym układzie.

Wygodnie jest wyznaczyć je korzystając z macierzy przejścia od układu osi centralnych (Y_c, Z_c) do układu osi głównych centralnych (Y, Z).

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-29.23^\circ) & \sin(-29.23^\circ) \\ \cos 60.77^\circ & \sin 60.77^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8726 & -0.4884 \\ 0.4884 & 0.8726 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

Wyznaczone w ten sposób współrzędne punktów konturu przekroju podane są w tabelce poniżej:

Współrzędne [10^{-2} m]	Punkty			
	1	2	3	4
y_c	-6.500	11.500	-0.500	-6.500
z_c	-5.000	-5.000	7.000	7.000
y	-3.230	12.477	-3.855	-9.091
z	-7.538	1.254	5.864	2.934

Dalej przy wyznaczaniu odcinków a_y i a_z , przez które oś obojętna przechodzi na osiach głównych centralnych będziemy korzystać z równania prostej przez dwa punkty:

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} (y - y_1)$$

oś obojętna 1-2

$$z + 7.538 \cdot 10^{-2} = \frac{1.254 + 7.538}{12.477 + 3.230} (y + 3.230 \cdot 10^{-2}) \rightarrow z = 0.560y - 5.730 \cdot 10^{-2}$$

$$a_y = 10.232 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad a_z = -5.730 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$y_{N1,2} = \frac{-20.828x \cdot 10^{-4}}{10.232 \cdot 10^{-2}} = -2.035 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad z_{N1,2} = \frac{-7.922 \cdot 10^{-4}}{-5.730 \cdot 10^{-2}} = 1.383 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

oś obojętna 2-3

$$z - 1.254 * 10^{-2} = \frac{5.864 - 1.254}{-3.855 - 12.477} (y - 12.477 * 10^{-2}) \rightarrow z = -0.282y + 4.776 * 10^{-2}$$

$$a_y = 16.920 * 10^{-2} \text{ m}, \quad a_z = 4.776 * 10^{-2} \text{ m},$$

$$y_{N2,3} = \frac{-20.828x * 10^{-4}}{16.920 * 10^{-2}} = -1.231 * 10^{-2} \text{ m}, \quad z_{N2,3} = \frac{-7.922 * 10^{-4}}{4.776 * 10^{-2}} = -1.659 * 10^{-2} \text{ m}.$$

oś obojętna 3-4

$$z - 5.864 * 10^{-2} = \frac{2.934 - 5.864}{-9.091 + 3.855} (y + 3.855 * 10^{-2}) \rightarrow z = 0.560y + 8.021 * 10^{-2}$$

$$a_y = -14.334 * 10^{-2} \text{ m}, \quad a_z = 8.021 * 10^{-2} \text{ m},$$

$$y_{N3,4} = \frac{-20.828x * 10^{-4}}{-14.334 * 10^{-2}} = 1.453 * 10^{-2} \text{ m}, \quad z_{N3,4} = \frac{-7.922 * 10^{-4}}{8.021 * 10^{-2}} = -0.988 * 10^{-2} \text{ m}.$$

oś obojętna 1-4

$$z - 2.934 * 10^{-2} = \frac{-7.538 - 2.934}{-3.230 + 9.091} (y + 9.091 * 10^{-2}) \rightarrow z = -1.787y - 13.309 * 10^{-2}$$

$$a_y = -7.448 * 10^{-2} \text{ m}, \quad a_z = -13.309 * 10^{-2} \text{ m},$$

$$y_{N4,1} = \frac{-20.828x * 10^{-4}}{-7.448 * 10^{-2}} = 2.796 * 10^{-2} \text{ m}, \quad z_{N4,1} = \frac{-7.922 * 10^{-4}}{-13.309 * 10^{-2}} = 0.595 * 10^{-2} \text{ m}.$$

Wyznaczony rdzeń pokazuje rysunek niżej.

