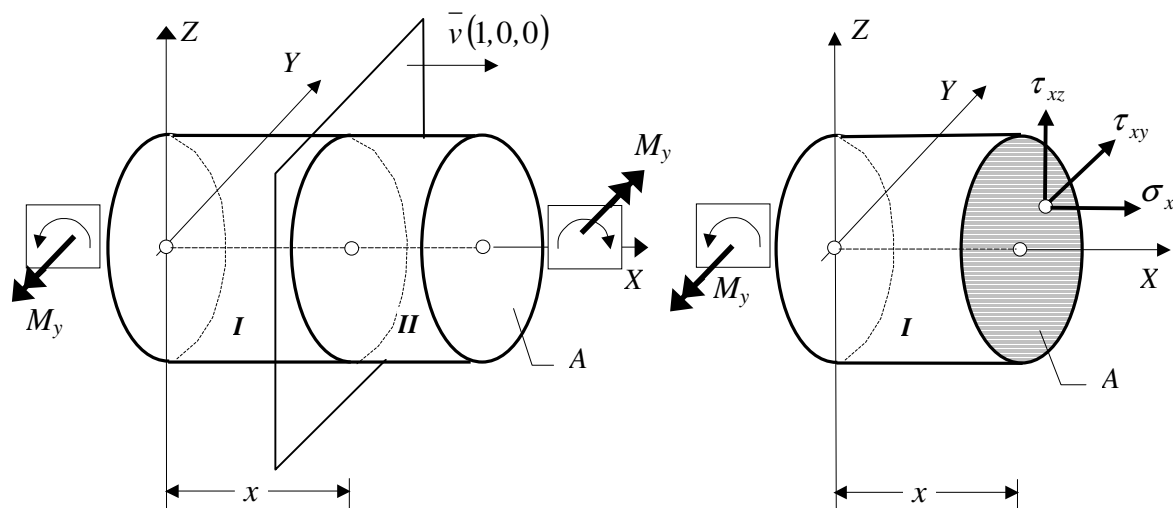


10. PROSTE ZGINANIE

10.1. Naprężenia i odkształcenia

Proste zginanie pręta pryzmatycznego występuje wówczas gdy układ sił zewnętrznych po jednej stronie jego przekroju poprzecznego redukuje się do momentu (pary sił), którego płaszczyzna działania jest prostopadła do płaszczyzny przekroju, a wektor jest równoległy do jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Moment ten \bar{M} nazywamy momentem zginającym. Naszym zadaniem będzie wyznaczenie macierzy naprężeń i odkształceń oraz współrzędnych wektora przemieszczenia w dowolnym punkcie takiego pręta.

Rozważmy więc, pokazany na rys. 10.1 pręt pryzmatyczny o polu przekroju poprzecznego A określony w układzie osi (X, Y, Z) w którym oś X jest osią pręta a osie (Y, Z) są głównymi centralnymi osiami bezwładności jego przekroju poprzecznego. W rozważanym przypadku występuje proste zginanie w płaszczyźnie (X, Z) a wektor momentu zginającego jest równoległy do osi Y i dlatego na rysunku moment ten jest nazwany M_y . Materiał pręta jest izotropowy, liniowo sprężysty o stałych materiałowych E oraz ν .



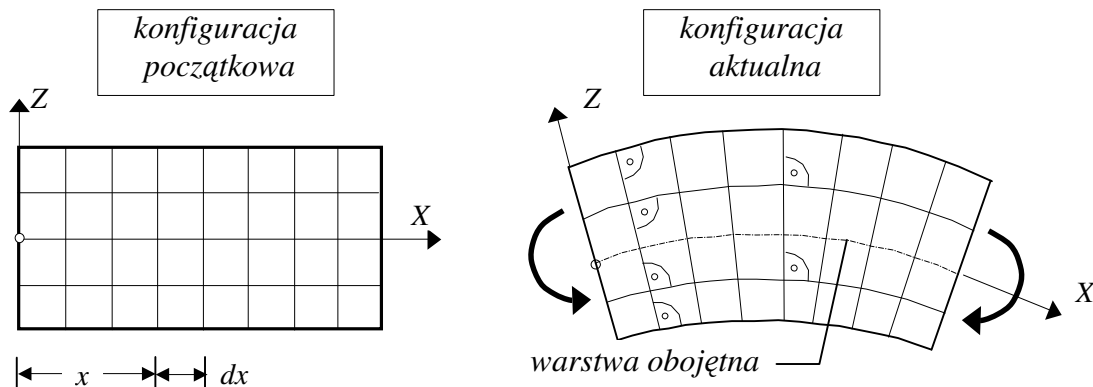
Rys. 10.1

Postawione zadanie rozwiążemy postępując analogicznie jak w przypadku osiowego rozciągania. Po dokonaniu myślowego przekroju pręta na dwie części, odrzuceniu części II i przyłożeniu do części I układu sił wewnętrznych rozważymy trzy komplety równań, tzn. równania równowagi, geometryczne i fizyczne.

Równania równowagi wynikające z twierdzenia o równoważności odpowiednich układu sił wewnętrznych i zewnętrznych w tym przypadku przyjmą postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \sigma_x dA = 0, \quad \iint_A \tau_{xy} dA = 0, \quad \iint_A \tau_{xz} dA = 0, \\ \iint_A (-\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dA = 0, \quad \iint_A \sigma_x z dA = M_y, \quad \iint_A -\sigma_x y dA = 0. \end{array} \right. \quad (9.1)$$

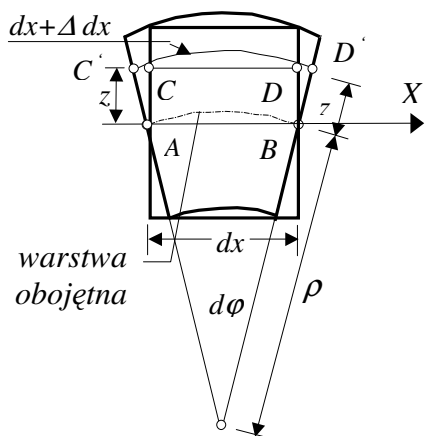
Równania geometryczne będą wynikiem analizy deformacji pręta po przyłożeniu obciążeń. Obraz deformacji zginanego pręta przypuszczony w oparciu o przyjęte założenia odnośnie własności jego materiału i hipotezę płaskich przekrojów Bernoulliego pokazuje rys. 10.2.



Rys. 10.2

Analizując przypuszczony obraz deformacji pręta po przyłożeniu obciążeń przyjmujemy, że:

- przekroje płaskie i prostopadłe do osi pręta przed przyłożeniem obciążenia pozostały płaskie i prostopadłe do osi pręta po deformacji,
- odkształcenia kątowe włókien równoległych do osi układu odniesienia są równe zero,
- odkształcenia liniowe związane są zależnością: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$,
- górne włókna uległy wydłużeniu, a dolne skróceniu, istnieje warstwa włókien - warstwa obojętna, których długość nie uległa zmianie, choć przyjęły formę krzywoliniową o stałym promieniu krzywizny ρ , i w konfiguracji początkowej włókna te leżały na płaszczyźnie (X, Y) .



Rys. 9.3

W celu wyznaczenia odkształcenia liniowego ε_x rozważmy deformację odcinka pręta o dowolnie małej długości dx przed przyłożeniem obciążeń (rys. 10.3). Po przyłożeniu obciążenia przekroje skrajne obróć się i utworzą dowolnie mały kąt $d\varphi$. Jeśli ρ jest promieniem krzywizny warstwy obojętnej to odkształcenia liniowe ε_x włókien odległych o z od warstwy obojętnej wynoszą:

$$\varepsilon_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta dx}{dx} = \lim_{d\varphi \rightarrow 0} \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho}$$

Tak więc równania geometryczne mają postać:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{z}{\rho},$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0.$$

Naprężenia wyznaczmy korzystając z równań Hooke'a.

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_x = E \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_y = 0$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \rightarrow \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \rightarrow \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \rightarrow \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx} \rightarrow \tau_{zx} = 0$$

Należy teraz sprawdzić czy wyprowadzone w oparciu o obserwacje deformacji pręta naprężenia spełniają równania równowagi (10.1) i związać naprężenia z obciążeniami, które redukują się tylko do momentu zginającego.

Zerowanie się naprężeń stycznych powoduje, że równania drugie, trzecie i czwarte są spełnione. Sprawdzamy pierwsze równanie:

$$\iint_A \sigma_x dA = 0 \rightarrow \iint_A E \varepsilon_x dA = 0 \rightarrow \frac{E}{\rho} \iint_A z dA = 0$$

jest ono spełnione bo całka przedstawia moment statyczny względem osi Y przekroju poprzecznego, a oś ta jest jego osią centralną.

Równanie szóste:

$$\iint_A -\sigma_x y dA = 0 \rightarrow -\frac{E}{\rho} \iint_A y z dA = 0$$

jest spełnione bo osie (Y , Z) są głównymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego, więc całka w powyższym równaniu, przedstawiająca moment dewiacji przekroju względem tych osi jest równa zero.

Sprawdzenie równania piątego:

$$\iint_A \sigma_x z dA = M_y \rightarrow \iint_A \frac{E}{\rho} z^2 dA = M_y \rightarrow \frac{E}{\rho} \iint_A z^2 dA = M_y$$

daje zależność między krzywizną osi zdeformowanego pręta i momentem zginającym:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{E J_y}, \quad (10.2)$$

co pozwala napisać związki wiążące moment zginający z odkształceniem liniowym i naprężeniem normalnym:

$$\varepsilon_x = \frac{M_y}{E J_y} z \quad (10.3)$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z \quad (10.4)$$

Ostatecznie więc macierze naprężeń i odkształceń przy prostym zginaniu w płaszczyźnie (X, Z) lub, inaczej mówiąc przy prostym zginaniu względem osi Y mają postać:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{M_y}{J_y} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{M_y}{E J_y} z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{M_y}{E J_y} z & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{M_y}{E J_y} z \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

9.2. Analiza stanu naprężenia i odkształcenia

W pręcie poddanym prostemu zginaniu występuje jednoosiowy niejednorodny stan naprężenia scharakteryzowany jednym tylko naprężeniem normalnym σ_x , które zależy liniowo od współrzędnej z punktu, w którym obliczamy naprężenia.

Wzór (10.4) dowodzi, że końce wektorów naprężenia σ_x leżą na płaszczyźnie, którą możemy nazwać płaszczyzną naprężenia. Krawędź przecięcia się płaszczyzny naprężenia z płaszczyzną przekroju poprzecznego nazywać będziemy osią obojętną, gdyż jest ona miejscem geometrycznym punktów, w których wartości naprężeń normalnych spełniają równanie:

$$\sigma_x = 0$$

Podstawienie do niego zależności (10.4) daje równanie osi obojętnej dla przypadku prostego zginania w płaszczyźnie (X, Z) :

$$z = 0,$$

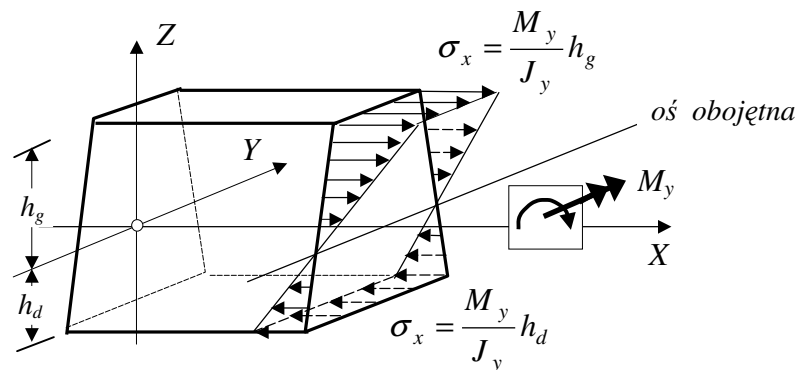
co pokazuje, że w rozważanym przypadku naprężenia zerują się w punktach leżących na osi Y , to jest tej głównej centralnej osi bezwładności przekroju poprzecznego do której równoległy jest wektor momentu zginającego. Zatem oś obojętna przy prostym zginaniu pokrywa się z kierunkiem wektora momentu zginającego i jej położenie nie zależy od wartości momentu zginającego.

Największe co do bezwzględnej wartości naprężenia wystąpią w punktach najodleglejszych od osi obojętnej i mają wartość:

$$\max |\sigma_x| = \frac{M_y}{J_y} \max |z| = \frac{M_y}{W_y}, \quad (10.6)$$

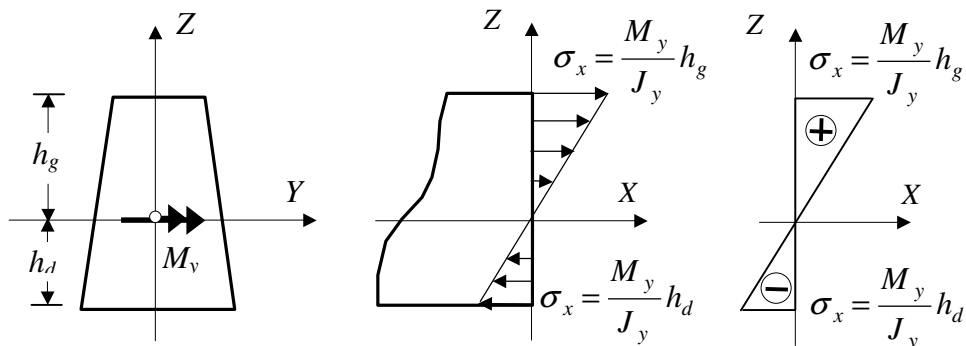
gdzie: $W_y = \frac{J_y}{\max |z|}$ - wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu względem osi Y .

Układ (rozkład) sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym pręta pokazuje rys. 10.4.



Rys. 10.4

Ponieważ wartości naprężeń normalnych w tym przypadku nie zależą od współrzędnej y to ich rozkład można rysować w płaszczyźnie $y = 0$, jak to zostało pokazane na rys. 10.5.



Rys. 9.5

Naprężenie normalne σ_x jest równocześnie naprężeniem głównym w danym punkcie, a dwa pozostałe naprężenia główne są równe zero i ich kierunki to jakiegokolwiek dwa prostopadłe do siebie i równocześnie prostopadłe do osi pręta.

Ekstremalne naprężenia styczne występują w przekrojach nachylonych pod kątem 45° do osi pręta i równają się połowie naprężeń normalnych w danym punkcie przekroju poprzecznego. Stan odkształcenia jest też niejednorodny ale trójosiowy. Odkształcenia liniowe w kierunku równoległym do osi pręta są odkształceniami głównymi. Pozostałe dwa odkształcenia główne są sobie równe a ich kierunki to jakiegokolwiek dwa prostopadłe do siebie i równocześnie prostopadłe do osi pręta.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę, że znaki w wyprowadzonych wzorach obowiązują przy przyjętych zwrotach osi układu odniesienia i wektora momentu gnącego. W przypadku innych zwrotów należy we wzorach uwzględnić korektę znaków.

10.3. Energia sprężysta pręta zginanego

Podstawienie wyrażeń określających elementy macierzy naprężeń do wzorów (8.18) pozwala na wyznaczenie gęstości energii sprężystej i energii sprężystej dla rozważanego przypadku zginania prostego pręta w płaszczyźnie (X, Z) :

$$\Phi = \frac{1}{2E} \left(\frac{M_y}{J_y} z \right)^2,$$

i stąd energia sprężysta takiego pręta o długości l wynosi:

$$U = \iiint_V \Phi dV = \iiint_V \frac{1}{2E} \left(\frac{M_y}{J_y} z \right)^2 dV = \int_0^l dx \iint_A \frac{1}{2E} \left(\frac{M_y}{J_y} z \right)^2 dA = \int_0^l \frac{M_y^2}{2EJ_y} dx = \frac{M_y^2 l}{2EJ_y}. \quad (10.7)$$

10.4. Wymiarowanie prętów zginanych

Ograniczymy się teraz tylko do wymiarowania ze względu na stan graniczny nośności przyjmując, że będzie on osiągnięty jeśli przynajmniej w jednym punkcie wartość naprężeń normalnych będzie równa wytrzymałości obliczeniowej.

Jeśli materiał pręta ma różną wytrzymałość obliczeniową przy rozciąganiu R_r i ściskaniu R_c , to warunki wymiarowania przyjmą postać:

$$\max \sigma_{xr} = \frac{M_y}{J_y} \max |z_r| \leq R_r \quad \text{i} \quad \max |\sigma_{xc}| = \frac{M_y}{J_y} \max |z_c| \leq R_c,$$

gdzie:

$\max \sigma_{xr}$ i $\max |\sigma_{xc}|$ - największe naprężenia rozciągające i ściskające w przekroju poprzecznym,

$\max |z_r|$ i $\max |z_c|$ - odległości od osi obojętnej skrajnych punktów przekroju poprzecznego, odpowiednio, rozciąganych i ściskanych.

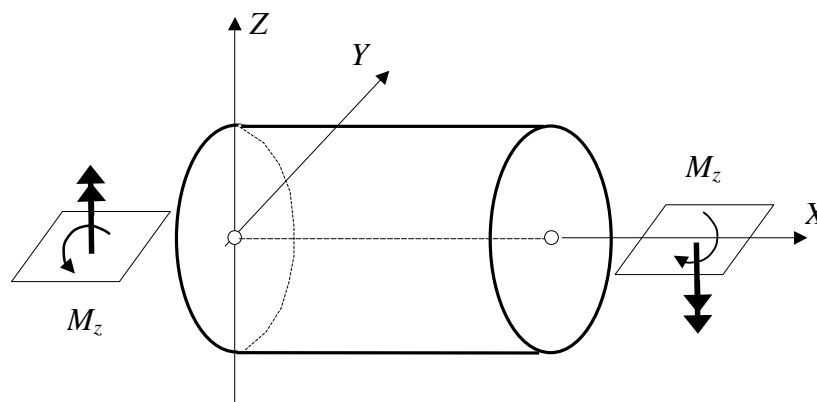
W przypadku materiału o tej samej wytrzymałości obliczeniowej przy rozciąganiu i ściskaniu równej R (materiał izonomiczny), warunek wymiarowania będzie jeden:

$$\max |\sigma_x| = \frac{M_y}{W_y} \leq R,$$

gdzie: $W_y = \frac{J_y}{\max |z|}$ - wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu względem osi Y .

10.5. Proste zginanie w płaszczyźnie (X, Y)

Ten przypadek prostego zginania pokazany został na rys. 10.6.



Rys. 10.6

Postępując analogicznie jak w przypadku prostego zginania w płaszczyźnie (X, Z) otrzymamy następujące macierze naprężeń i odkształceń:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{M_z}{J_z} y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{M_z}{E J_z} y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{M_z}{E J_z} y & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{M_z}{E J_z} y \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

Zależność wiążąca krzywiznę osi pręta po deformacji z momentem zginającym, geometrią pręta i jego modułem Younga ma postać:

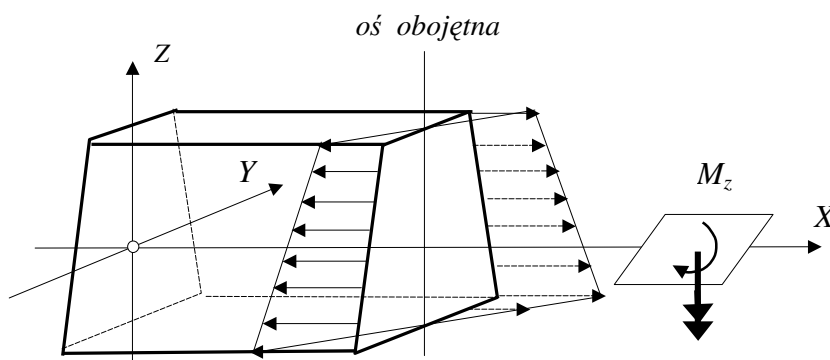
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E J_z}. \quad (10.9)$$

Oś obojętną w tym przypadku jest oś Z, a największe co do bezwzględnej wartości naprężenia, które wystąpią we włóknach najodleglejszych od osi obojętnej, mają wielkość:

$$\max |\sigma_x| = \frac{M_z}{J_z} \max |y| = \frac{M_z}{W_z} \quad (10.10)$$

gdzie: $W_z = \frac{J_z}{\max |y|}$ - wskaźnik wytrzymałości przy zginaniu względem osi Z.

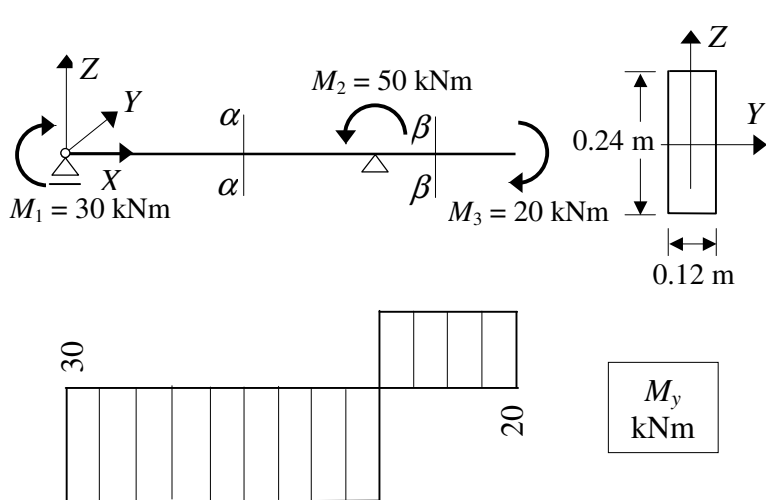
Rozkład naprężeń normalnych σ_x w przekroju poprzecznym pokazuje rys. 10.7.



Rys. 10.7

10.6. Przykłady

Przykład 10.6.1. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych σ_x w przekroju $\alpha-\alpha$ i $\beta-\beta$ belki prostokątnej o wymiarach przekroju $b \times h = 0.12 \times 0.24$ m obciążonej momentami jak na rysunku.

**Rozwiązanie**

Momenty działają w płaszczyźnie (X, Z) , można więc powiedzieć, że występuje zginanie względem osi Y . Wyznaczenie jej położenia jest łatwe, przechodzi przez środek ciężkości prostokąta i jest prostopadła do osi Z . Wykonanie wykresu momentów zginających pozwala na wyznaczenie wartości momentów zginających w zadanych przekrojach $\alpha-\alpha$ i $\beta-\beta$.

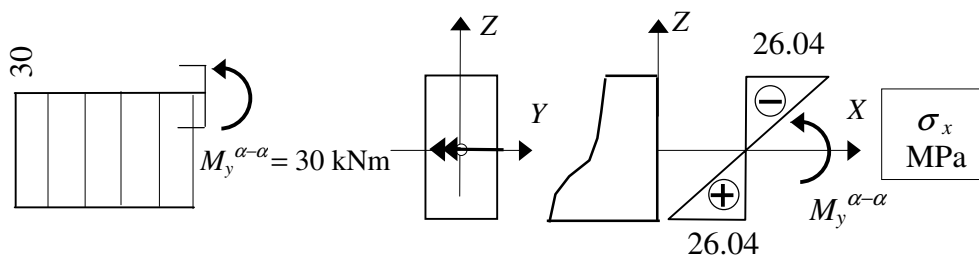
Rzędne wykresu momentów umieszczone są po stronie włókien rozciąganych.

Wartości charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego belki są równe:

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13824 \text{ cm}^4, \quad W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 24^2}{6} = 1152 \text{ cm}^3$$

Rozkład naprężeń normalnych σ_x w przekroju $\alpha-\alpha$

Wykres momentów pokazuje, że w tym przekroju rozciągane są włókna dolne i moment zginający w rozważanym przekroju ma zwrot pokazany na poniższym rysunku.



Przy takim momencie zginającym i przyjętych zwrotach układu współrzędnych w punktach przekroju poprzecznego o dodatnich współrzędnych z (włókna górne) występują naprężenia ściskające i stąd rozkład naprężeń normalnych w tym przekroju określa wzór:

$$\sigma_x = -\frac{M_y^{\alpha-\alpha}}{J_y} z.$$

Wartości naprężeń we włóknach górnych i dolnych wynoszą:

$$\sigma_{xg} = -\frac{30 \cdot 10^3}{13824 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.12 = -26.04 \text{ MPa}, \quad \sigma_{xd} = -\frac{30 \cdot 10^3}{13824 \cdot 10^{-8}} (-0.12) = 26.04 \text{ MPa}.$$

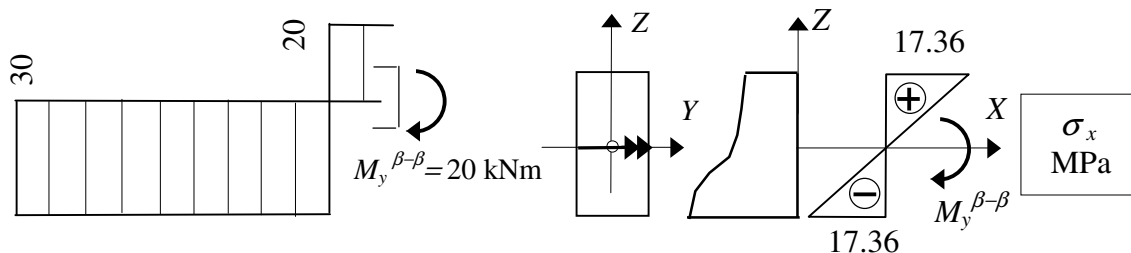
Ponieważ są to włókna skrajne to licząc w nich naprężenia możemy wykorzystać wskaźnik wytrzymałości:

$$\sigma_{xg} = -\frac{M_y^{\alpha-\alpha}}{W_y} = -\frac{30 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} = -26.04 \text{ MPa}, \quad \sigma_{xd} = \frac{M_y^{\alpha-\alpha}}{W_y} = \frac{30 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} = 26.04 \text{ MPa}.$$

Rozkład naprężeń pokazuje rysunek wyżej.

Rozkład naprężeń normalnych σ_x w przekroju $\beta\text{-}\beta$

W tym przekroju rozciągane są włókna górne i moment zginający ma zwrot pokazany na poniższym rysunku.



W tym przypadku w punktach przekroju poprzecznego o dodatnich współrzędnych z (włókna górne) występują naprężenia rozciągające (dodatnie wg umowy znakowania naprężeń normalnych) i dlatego rozkład naprężeń normalnych w przekroju wyznacza zależność:

$$\sigma_x = \frac{M_y^{\beta-\beta}}{J_y} z.$$

Wartości naprężeń we włóknach górnych i dolnych są równe:

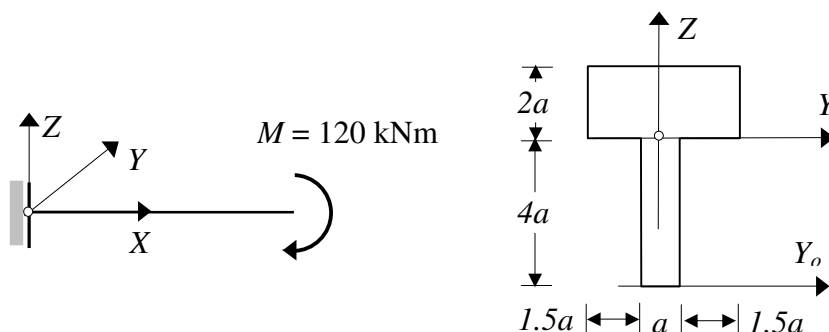
$$\sigma_{xg} = \frac{20 \cdot 10^3}{13824 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.12 = 17.36 \text{ MPa}, \quad \sigma_{xd} = \frac{20 \cdot 10^3}{13824 \cdot 10^{-8}} (-0.12) = -17.36 \text{ MPa},$$

lub

$$\sigma_{xg} = \frac{M_y^{\beta-\beta}}{W_y} = \frac{20 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} = 17.36 \text{ MPa}, \quad \sigma_{xd} = \frac{M_y^{\beta-\beta}}{W_y} = -\frac{20 \cdot 10^3}{1152 \cdot 10^{-6}} = -17.36 \text{ MPa}.$$

Rozkład naprężeń pokazuje rysunek wyżej.

Przykład 10.6.2. Wyznaczyć wymiar a przekroju podanej belki z warunku granicznego nośności jeśli wytrzymałość obliczeniowa materiału przy rozciąganiu $R_t = 60 \text{ MPa}$, a przy ściskaniu $R_c = 180 \text{ MPa}$. Po określeniu przekroju wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych σ_x .



Rozwiązanie

Występuje przypadek prostego zginania w płaszczyźnie (X, Z) . Należy zacząć od wyznaczenia położenia osi zginania i zarazem osi obojętnej; będzie to główna centralna oś bezwładności przekroju poprzecznego do której równoległy jest wektor momentu zginającego. W rozważanym przypadku będzie to oś Y .

Wyznaczenie osi obojętnej:

pole przekroju: $A = 12a^2$,

moment statyczny względem osi Y_0 : $S_{y_0} = 4a^2 * 2a + 8a^2 * 5a = 48a^3$,

położenie osi zginania: $z_0 = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{48a^3}{12a^2} = 4a$.

Moment bezwładności względem osi zginania: $J_y = \frac{4a * (2a)^3}{3} + \frac{a * (4a)^3}{3} = 32a^4$

Górne włókna belki są rozciągane a dolne ściskane.

Potrzebny wymiar a ze względu na:

- rozciąganie $\frac{M_y}{J_y} 2a \leq R_r \rightarrow \frac{120 * 10^3}{32a^4} 2a \leq 60 * 10^6 \rightarrow a_r \geq 5.0 * 10^{-2} \text{ m}$
- ściskanie $\frac{M_y}{J_y} 4a \leq R_c \rightarrow \frac{120 * 10^3}{32a^4} 4a \leq 180 * 10^6 \rightarrow a_c \geq 4.4 * 10^{-2} \text{ m}$

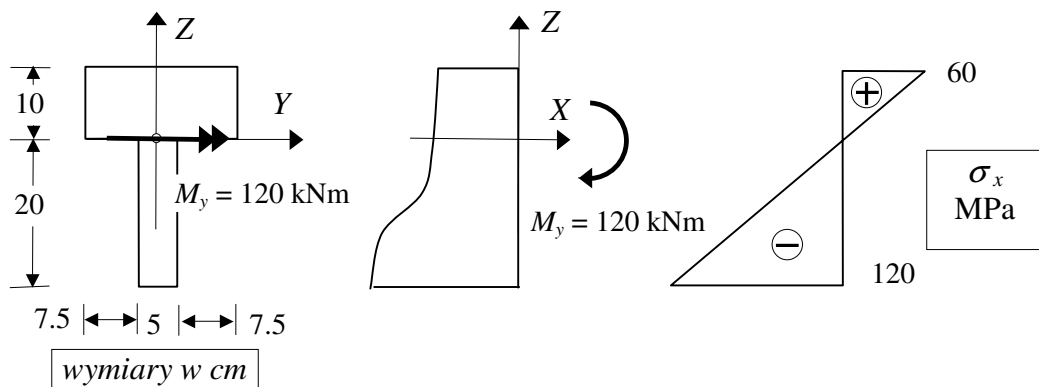
należy przyjąć $a \geq \max(a_c, a_r)$. Przyjęto do wykonania $a = 5.0 \text{ cm}$.

$$J_y = 32 * 5^4 = 2 * 10^4 \text{ cm}^4$$

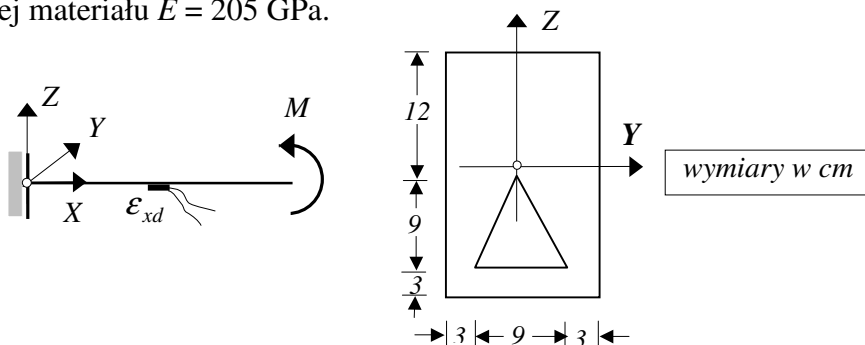
Wartości naprężeń normalnych wynoszą:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z \rightarrow \sigma_{xg} = \frac{120 * 10^3}{2 * 10^{-4}} 0.10 = 60.0 \text{ MPa}, \quad \sigma_{xd} = \frac{120 * 10^3}{2 * 10^{-4}} (-0.20) = -120.0 \text{ MPa},$$

ich rozkład pokazano niżej.



Przykład 10.6.3. Zmierzone tensometrem elektrooporowym odkształcenia liniowe dolnych włókien belki zginanej jak na rysunku wynoszą: $\epsilon_{xd} = 0.0004$. Wyznaczyć wartość momentu zginającego M oraz rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym belki jeśli moduł Younga jej materiału $E = 205 \text{ GPa}$.



Rozwiązanie

Belka jest zginana w płaszczyźnie (X, Z). Jej górne włókna są ściskane, więc w przyjętym układzie współrzędnych, rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym określa zależność :

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{J_y} z. \quad (a)$$

Wyznaczenie położenia osi zginania Y:
pole przekroju:

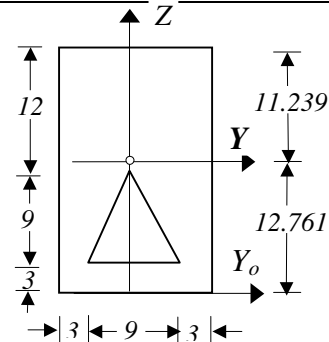
$$A = 15 * 24 - 9 * 9 * 6 = 319.50 \text{ cm}^2,$$

moment statyczny względem osi Y_0 :

$$S_{y_0} = 15 * 24 * 12 - 0.5 * 9 * 9 * 6 = 4077.00 \text{ cm}^3,$$

położenie osi zginania:

$$z_0 = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{4077.0}{319.5} = 12.761 \text{ cm}.$$



Moment bezwładności względem osi zginania:

$$J_y = \frac{15 * 24^3}{12} + 15 * 24 * 0.761^2 - 2 \left[\frac{4.5 * 9^3}{36} + 0.5 * 4.5 * 9 * (12.761 - 6)^2 \right] = 15454.933 \text{ cm}^4.$$

Wyznaczone na podstawie zmierzonych odkształceń naprężenia normalne w dolnych włóknach belki są równe:

$$\sigma_{xd} = E \varepsilon_{xd} = 205 * 10^9 * 0.0004 = 82.00 \text{ MPa}.$$

Naprężenia normalne we włóknach dolnych obliczone ze wzoru (a) wynoszą:

$$\sigma_{xd} = -\frac{M}{15454.933 * 10^{-8}} (-12.761 * 10^{-2}),$$

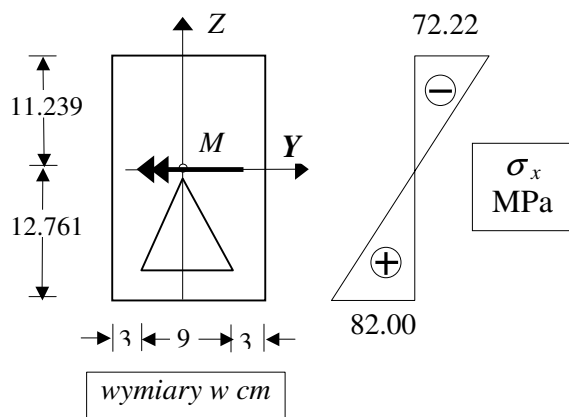
i z porównania ich z wielkością naprężeń otrzymanych na podstawie pomiarów wyznaczamy wartość momentu zginającego M :

$$-\frac{M}{15454.933 * 10^{-8}} (-12.761 * 10^{-2}) = 82.00 * 10^6 \rightarrow M = 99.311 \text{ kNm}.$$

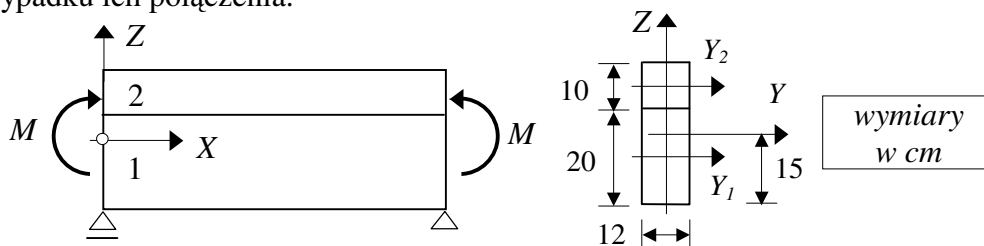
Naprężenia normalne we włóknach górnych wynoszą:

$$\sigma_{xg} = -\frac{99.311 * 10^3}{15454.933 * 10^{-8}} 11.239 * 10^{-2} = -72.220 \text{ MPa}.$$

Rozkład naprężeń normalnych jest niżej pokazany.



Przykład 10.6.4. Dwie drewniane belki prostokątne o wymiarach przekroju 0.12x0.20 m i 0.12x0.10 m położone na sobie obciążono momentem $M = 40$ kNm. Wyznaczyć rozkłady naprężeń normalnych σ_x w obu belkach przy założeniu braku tarcia między nimi oraz w przypadku ich połączenia.



Rozwiązanie

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, bo do wyznaczenia momentów M_1 oraz M_2 działających na poszczególne belki dysponujemy tylko jednym równaniem momentów. Brakujące równanie, równanie geometryczne wynika z równości krzywizn obu belek. Tak więc komplet równań przybiera postać:

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = M \\ \frac{M_1}{E J_{y1}} = \frac{M_2}{E J_{y2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 + M_2 = 40 \cdot 10^3 \\ \frac{M_1}{(0.12 \cdot 0.20^3/12)} = \frac{M_2}{(0.12 \cdot 0.10^3/12)} \end{cases}$$

W wyniku jego rozwiązania otrzymujemy wielkości momentów działających na poszczególne belki:

$$M_1 = 35.56 \text{ kNm}, \quad M_2 = 4.44 \text{ kNm}$$

Wartości naprężeń we włóknach skrajnych belek niepołączonych:

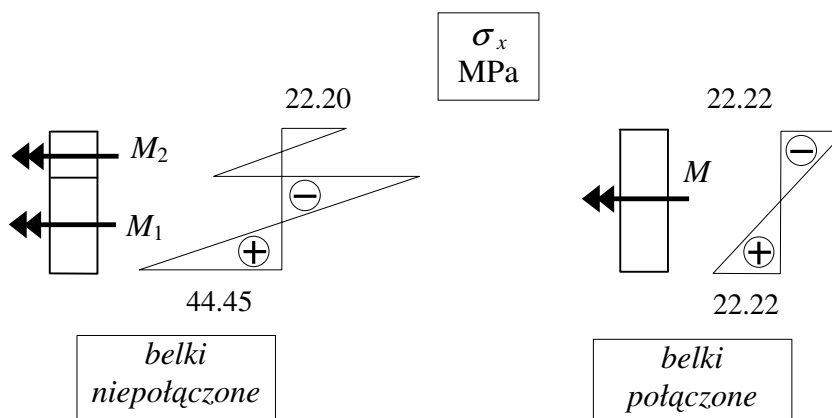
$$\sigma_{x1} = \mp \frac{M_1}{W_{y1}} = \mp \frac{35.56 \cdot 10^3}{(0.12 \cdot 0.20^2/6)} = \mp 44.45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x2} = \mp \frac{M_2}{W_{y2}} = \mp \frac{4.44 \cdot 10^3}{(0.12 \cdot 0.10^2/6)} = \mp 22.20 \text{ MPa}$$

Wartości naprężeń we włóknach skrajnych belek połączonych:

$$\sigma_x = \mp \frac{M}{W_y} = \mp \frac{40.0 \cdot 10^3}{(0.12 \cdot 0.30^2/6)} = \mp 22.22 \text{ MPa.}$$

Rozkłady naprężeń normalnych pokazano niżej.



Przykład 10.6.5. Obliczyć zmianę objętości ΔV , zginanego momentem M_y , pręta o długości l i momencie bezwładności J_y , wykonanego z materiału o stałych E oraz ν .

Rozwiązanie

Całkowitą zmianę objętości ΔV pręta zginanego otrzymamy całkując po jego objętości sumę odkształceń liniowych na przekątnej głównej macierzy odkształceń:

$$\Delta V = \iiint_V (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dV = \frac{(1-2\nu)M_y}{E J_y} \int_0^l dx \iint_A z dA = 0.$$

Zmiana objętości jest równa zero, gdyż całka $\iint_A z dA = 0$, w powyższym wyrażeniu bo to moment statyczny względem osi centralnej Y .