

## 8. ENERGIA SPRĘŻYSTA

### 8.1. Podstawowe pojęcia

Każde ciało rzeczywiste pod działaniem sił zewnętrznych doznaje deformacji, na których siły obciążające wykonują pewną pracę  $L$ . Praca ta w przypadku adiabaticznego procesu termodynamicznego jest niezależna od sposobu jej wykonania i równa się energii wewnętrznej układu  $W$ , tj. funkcji, której przyrost w czasie  $\Delta t$  jest równy pracy dostarczonej układowi w tym czasie:

$$L = W .$$

Powyższa równość wynika z I prawa termodynamiki dla procesów adiabaticznych, tzn. takich przy których nie ma wymiany ciepła z otoczeniem albo, inaczej, takich, że nie zachodzi dyssypacja energii układu, co jest charakterystyczną cechą układu sprężystego.

Można dowieść, że w przypadku ciała sprężystego i obciążeń statycznych energia wewnętrzna układu jest równa energii potencjalnej  $W_p$ , która równa się pracy sił wewnętrznych na odkształceniach przez nie wywołanych i nazywana jest energią sprężystą układu  $U$ :

$$L = W = W_p = U .$$

Zatem:

**energia sprężysta  $U$  to praca sił wewnętrznych na odkształceniach przez nie wywołanych.**

Energia ta jest odwracalna, co znaczy, że po usunięciu sił obciążających zużywa się na odzyskanie początkowej konfiguracji ciała i w nie naprężonym i nie odkształconym stanie układu jest równa zero .

Gęstością energii sprężystej  $\Phi$  lub, inaczej, energią sprężystą właściwą nazywamy ilość energii sprężystej na jednostkę objętości ciała. Stąd:

$$U = \iiint_V \Phi dV , \quad (8.1)$$

gdzie:  $V$  jest objętością ciała.

Dalej dla prostoty wzorów, łatwości wyprowadzeń i zapisów, wprowadzimy wskaźnikowy zapis naprężeń i odkształceń. Jego istotę pokazują macierze naprężeń i odkształceń niżej zapisane w zapisie klasycznym i wskaźnikowym:

układ współrzędnych  $(X, Y, Z)$

układ współrzędnych  $(X_1, X_2, X_3)$

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Obliczmy ile wynosi  $\Phi$  dla ciała o objętości  $V$  znajdującego się w równowadze pod działaniem pewnego układu sił zewnętrznych. W wyniku obciążenia w każdym punkcie tego ciała powstają stany naprężenia i odkształcenia charakteryzowane poprzez macierze  $T_\sigma$  i  $T_\epsilon$ .

Wyznamy wpiery dowolnie mały przyrost gęstości energii sprężystej na dowolnie małych przyrostach odkształceń:

$$d\Phi = \sigma_{11} d\epsilon_{11} + \sigma_{12} d\epsilon_{12} + \dots + \sigma_{33} d\epsilon_{33} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (8.2)$$

W równaniu (8.2) zastosowana została umowa sumacyjna Einsteina, która mówi, że: jeżeli w wyrażeniu wskaźnikowym będącym jednomianem wskaźniki powtarzają się, to należy dokonać sumowania po powtarzających się wskaźnikach do odpowiedniej wymiarowości obiektu. I tak np.:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3; \quad \epsilon_{ii} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Równanie (8.2) można, wykorzystując pojęcie iloczynu skalarnego (poprawniej mówiąc iloczynu diadycznego ze zwężeniem) tensorów, zapisać w bardzo prostej formie:

$$d\Phi = T_\sigma dT_\epsilon \quad (8.3)$$

Iloczyn skalarny tensorów otrzymujemy dodając do siebie iloczyny jednoimiennych elementów.

Pozwala to zapisać gęstość energii sprężystej  $\Phi$  w postaci:

$$\Phi = \int_0^{T_\epsilon} T_\sigma dT_\epsilon \quad (8.4)$$

## 15.2. Energia sprężysta ciała Hooke'a

Dla ciała liniowo sprężystego związek fizyczny możemy zapisać w formie:

$$T_\sigma = D T_\epsilon \quad (8.5)$$

gdzie:  $D$  – macierz (tensor) współczynników materiałowych.

Po podstawieniu (8.5) do (8.4) i wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$\Phi = \int_0^{T_\epsilon} D T_\epsilon dT_\epsilon = \frac{1}{2} D T_\epsilon^2 = \frac{1}{2} T_\sigma T_\epsilon \quad (8.6)$$

Wzór (8.6) zapiszemy w innej postaci po dokonaniu rozkładu macierzy (tensorów) naprężeń i odkształceń na sumę odpowiednich aksjatorów i dewiatorów.

$$T_\sigma = A_\sigma + D_\sigma \quad \text{i} \quad T_\epsilon = A_\epsilon + D_\epsilon \quad (8.7)$$

Przypomnimy, że związki fizyczne między aksjatorami i dewiatorami naprężeń i odkształceń (wyprowadziliśmy je formułując III postać prawa Hooke'a) można zapisać w formie zwykle nazywanej prawem zmiany objętości i prawem zmiany postaci:

$$A_\sigma = 3K A_\epsilon \quad \text{oraz} \quad D_\sigma = 2GD_\epsilon \quad (8.8)$$

gdzie:  $3K = \frac{E}{1-2\nu}$  oraz  $2G = \frac{E}{1+\nu}$  to stałe materiałowe.

Korzystając ze wzorów (8.7) otrzymujemy:

$$\Phi = \frac{1}{2}(A_\sigma + D_\sigma)(A_\varepsilon + D_\varepsilon) = \frac{1}{2}A_\sigma A_\varepsilon + \frac{1}{2}D_\sigma D_\varepsilon \quad (8.9)$$

gdyż z bardzo łatwej analizy rachunkowej wynika, że :

$$A_\sigma D_\varepsilon = 0 \quad \text{oraz} \quad D_\sigma A_\varepsilon = 0.$$

Możemy zatem powiedzieć, że gęstość energii sprężystej stanowi sumę

$$\Phi = \Phi_V + \Phi_f, \quad (8.10)$$

gdzie:

$$\Phi_V = \frac{1}{2}A_\sigma A_\varepsilon - \text{gęstość energii sprężystej związanej ze zmianą objętości}, \quad (8.11)$$

$$\Phi_f = \frac{1}{2}D_\sigma D_\varepsilon - \text{gęstość energii sprężystej związanej ze zmianą postaci}. \quad (8.12)$$

I analogicznie, energia sprężysta układu stanowi sumę:

$$U = U_V + U_f, \quad (8.13)$$

gdzie:

$$U_V = \int_V \Phi_V dV, \quad (8.14)$$

jest energią odkształcenia objętościowego i przedstawia pracę sił zewnętrznych zużytyą na zmianę jego objętości, a

$$U_f = \int_V \Phi_f dV, \quad (8.15)$$

jest energią odkształcenia postaciowego i przedstawia pracę sił zewnętrznych zużytyą na zmianę postaci układu.

Wzory na odpowiednie gęstości energii sprężystej, wyrażone przez elementy macierzy naprężeń mają postać:

$$\Phi_V = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (8.16)$$

$$\Phi_f = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (8.17)$$

$$\Phi = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (8.18)$$

Łatwo można stwierdzić, że pochodne gęstości energii sprężystej po elementach macierzy naprężeń równają się odpowiednim elementom macierzy odkształceń.

Wyznamy przykładowo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{2E} [2\sigma_x - 2\nu(\sigma_y - \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)] = \varepsilon_x,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{2E} [4(1+\nu)\tau_{xy}] = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \gamma_{xy}.$$

Jest rzeczą oczywistą, że korzystając ze związków fizycznych Hooke'a, możemy wyrazić gęstości energii sprężystej tylko poprzez elementy macierzy odkształceń. Wówczas pochodne  $\Phi$  po elementach macierzy odkształceń są równe odpowiednim elementom macierzy naprężeń.