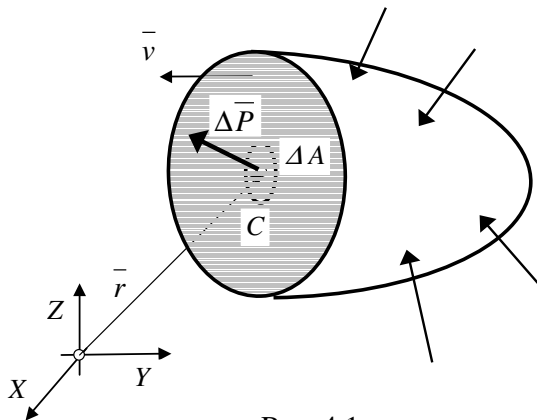


## 4. TEORIA STANU NAPRĘŻENIA

### 4.1. Definicja naprężenia

W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy siłę wewnętrzną w danym punkcie i przekroju. Stwierdziliśmy też, że dokonując podziału bryły na dwie części możemy analizować zachowanie się tylko jednej części pod warunkiem, że do każdego punktu przekroju przyłożymy siłę wewnętrzną z jaką oddziałują na niego wszystkie punkty odrzuconej części. Siły te tworzą w przekroju nieskończony układ sił wewnętrznych, który jest bardzo ważny w analizie zachowania się konstrukcji i będzie przedmiotem szczegółowych rozważań w toku dalszych wykładów.

Aby móc dokonywać analizy układu sił wewnętrznych należy precyzyjnie zdefiniować ich miarę którą nazwiemy naprężeniem.



Rys. 4.1

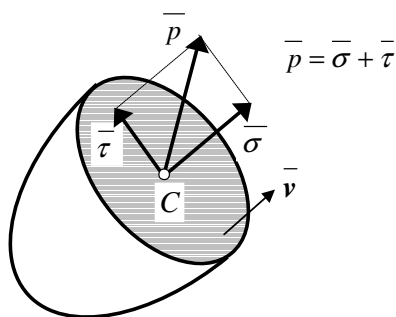
W tym celu rozważmy dowolny, pokazany na rys. 4.1, przekrój bryły płaszczyzną o wektorze normalnym  $\bar{n}$  przechodzącą przez dowolny punkt  $C$  o wektorze wodzącym  $\bar{r}$ . Do każdego punktu płaszczyzny przekroju przyłożona jest siła wewnętrzna. Wydzielmy wokół punktu  $C$  element powierzchni  $\Delta A$ . Niech  $\Delta \bar{P}$  oznacza sumę sił wewnętrznych przyłożonych do punktów powierzchni  $\Delta A$ .

Przyjmijmy definicję:

naprężeniem w punkcie o wektorze wodzącym  $\bar{r}$  na powierzchni przekroju o normalnej  $\bar{n}$  nazywamy wektor

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta A} . \quad (4.1)$$

Fizycznie naprężenie jest gęstością sił wewnętrznych i jak widać ze wzoru (4.1) w ogólności, podobnie jak siła wewnętrzna, w bryle (konstrukcji) jest funkcją wektorową dwóch wektorów, wektora wodzącego punktu  $\bar{r}$  i wektora normalnego płaszczyzny przekroju  $\bar{n}$ .



Rys. 4.2

W ogólności kierunek wektora naprężenia jest dowolny w odniesieniu do płaszczyzny na której występuje. Możemy go rozłożyć, jak pokazuje rys. 4.2, na dwie składowe których kierunki są normalne i styczne do przekroju nazywając je odpowiednio naprężeniem normalnym i stycznym. Tak więc naprężenie normalne  $\bar{\sigma}$  to składowa naprężenia prostopadła do płaszczyzny przekroju a naprężenie styczne  $\bar{\tau}$  to składowa naprężenia styczna do płaszczyzny przekroju.

## 4.2. Stan naprężenia w punkcie

Stan naprężenia w punkcie to nieskończony zbiór wektorów naprężeń przyporządkowanych wszystkim płaszczyznom przecięcia bryły, przechodzących przez ten punkt.

Mówimy, że znamy stan naprężenia w bryle jeśli znamy stan naprężenia w każdym jej punkcie.

Rozróżniamy trzy rodzaje stanów naprężenia w punkcie: jednoosiowy, płaski i przestrzenny.

Jednoosiowy stan naprężenia występuje wówczas, gdy wektory naprężeń przyporządkowane dowolnym płaszczyznom cięcia bryły w danym punkcie mają ten sam kierunek.

Płaski stan naprężenia występuje wówczas, gdy wektory naprężeń przyporządkowane dowolnym płaszczyznom cięcia bryły w danym punkcie leżą w jednej płaszczyźnie (płaszczyźnie stanu naprężenia).

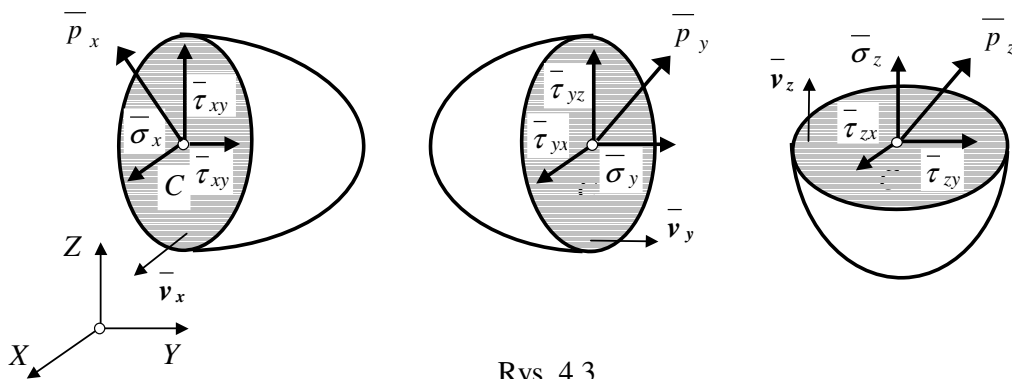
Przestrzenny stan naprężenia występuje wówczas, gdy wektory naprężeń przyporządkowane dowolnym płaszczyznom cięcia bryły w danym punkcie są w ogólności różne (mają różne długości, kierunki i zwroty).

Każdy z tych charakterystycznych stanów naprężenia w punkcie, w całej bryle może być jednorodny lub niejednorodny. Jednorodny jest wówczas gdy nie zależy od wyboru punktu.

Z definicji stanu naprężenia w punkcie jest zrozumiałe, że jego znajomość jest nieodzowna przy analizie tego co się dzieje w danym punkcie ciała poddanego działaniu układu sił zewnętrznych. To oznacza, że musimy znać wektory naprężeń na każdej dowolnej płaszczyźnie cięcia bryły w danym punkcie a przy analizie zachowania się konstrukcji w każdym jej punkcie.

## 4.3. Macierz naprężeń. Graficzny obraz macierzy naprężeń

Dokonajmy przekroju rozważanej bryły w dowolnie wybranym punkcie  $C$  trzema płaszczyznami prostopadłymi do osi układu  $(X, Y, Z)$ . Wektory naprężeń przyporządkowane tym płaszczyznom cięcia oznaczmy, odpowiednio, przez  $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$  (rys. 4.3).



Rys. 4.3

Każdy z tych wektorów naprężeń możemy rozłożyć na trzy składowe równoległe do osi układu. Jak łatwo zauważyć, zawsze jedna z tych składowych będzie normalna do płaszczyzny przecięcia a dwie pozostałe będą do niej styczne. Zgodnie z rys. 4.3 możemy zapisać:

$$\begin{aligned}\bar{p}_x &= \bar{\sigma}_x + \bar{\tau}_{xy} + \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{p}_y &= \bar{\tau}_{yx} + \bar{\sigma}_y + \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{p}_z &= \bar{\tau}_{zx} + \bar{\tau}_{zy} + \bar{\sigma}_z\end{aligned}\tag{4.2}$$

Współrzędne wektorów naprężeń  $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$  oznaczać będziemy podobnie jak ich składowe, opuszczając jedynie nadkreślenie i zapiszemy je w formie macierzy  $T_\sigma$  nazywanej macierzą naprężeń:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Możemy więc powiedzieć, że:

**macierz naprężeń w punkcie to uporządkowany zbiór współrzędnych trzech wektorów naprężeń na płaszczyznach prostopadłych do osi układu współrzędnych.**

Uporządkowany w ten sposób, że wiersze przedstawiają kolejne współrzędne, kolejnych wektorów naprężeń. W wyniku takiego uporządkowania na przekątnej macierzy znajdują się naprężenia normalne a poza przekątną naprężenia styczne. Jasna jest też wymowa indeksów przy naprężeniach. Indeks przy naprężeniu normalnym pokazuje płaszczyznę na której ono występuje i do której jest ono prostopadłe, czyli oś układu do której to naprężenie jest równoległe. Indeksy przy naprężeniu stycznym pokazują: pierwszy płaszczyznę na której ono występuje, a drugi oś układu do której to naprężenie jest równoległe.

Zatem np.  $\sigma_z$  to naprężenie normalne na płaszczyźnie prostopadłej do osi Z, a  $\tau_{yx}$  to naprężenie styczne na płaszczyźnie prostopadłej do osi Y i równoległe do osi X.

Powszechnie jest stosowana i co ważniejsze jest wygodna szczególna umowa znakowania elementów macierzy naprężeń (czyli współrzędnych wektorów naprężeń na płaszczyznach prostopadłych do osi układu).

Za dodatnie, w macierzy naprężeń, uważamy współrzędne takich składowych, które mają:

- zwrot zgodny ze zwrotem osi do której są równoległe
- i zwrot normalnej zewnętrznej płaszczyzny na której one występują także zgodny ze zwrotem osi układu do której ta normalna jest równoległa

lub jeśli zarówno składowa jak i normalna mają zwroty przeciwne do odpowiednich osi, do których są równoległe.

Jest tzw. reguła podwójnej zgodności. W każdym innym przypadku współrzędna jest ujemna. Zgodnie z przyjętą umową naprężenie normalne jest dodatnie jeśli jest rozciągające, a ujemne jeśli jest ściskające.

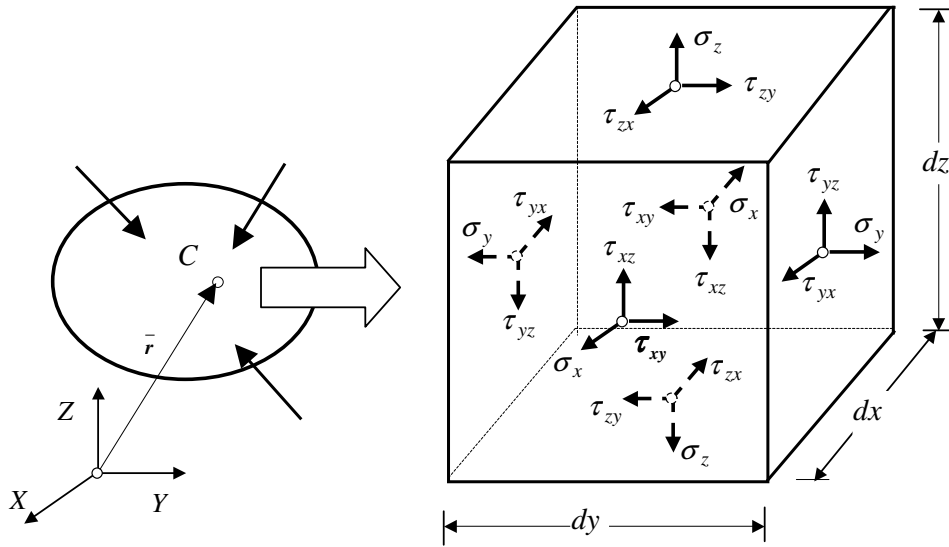
Należy powiedzieć, że macierz naprężeń w punkcie to zbiór liczb. Gdybyśmy rozszerzyli to pojęcie na całą objętość bryły to miejsce liczb zajmą funkcje współrzędnych wektora wodzącego dowolnego punktu obszaru bryły.

Jak się wkrótce przekonamy macierz naprężeń w punkcie będzie podstawą określenia w nim stanu naprężenia.

Dla lepszego zrozumienia oraz utrwalenia przyjętych definicji i umów znakowania elementów macierzy naprężeń przedstawimy jej graficzną interpretację.

Weźmy obciążone, pozostające w równowadze ciało i wybierzmy w nim dowolny punkt materialny C (rys. 4.4).

Będziemy go modelować za pomocą dowolnie małego sześcianu, którego ścianki są równoległe do płaszczyzn układu odniesienia.



Rys. 4.4

Ten punkt materialny możemy wyjąć z rozważanej bryły pod warunkiem, że przyłożymy do niego wszystkie siły z jakimi pozostałe punkty ciała działają na niego. Wielkości tych sił otrzymamy mnożąc elementy macierzy naprężeń pokazane na rys. 4.4 przez powierzchnie odpowiednich ścianek sześcianu. Tak więc pokazany na rys. 4.4 sześcian pokazuje graficzny obraz macierzy naprężeń (wszystkie narysowane na nim składowe macierzy naprężeń są dodatnie) i równocześnie siły z jakimi wszystkie punkty bryły działają na punkt C.

Z założenia o równowadze rozważanej bryły wynika równowaga sił wewnętrznych działających na punkt C.

Rozpisując warunki równowagi tych sił otrzymamy zależności:

- z warunków zerowania się momentów sił względem osi układu

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases} \quad (4.4)$$

- z warunków zerowania się rzutów sił na osie układu

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

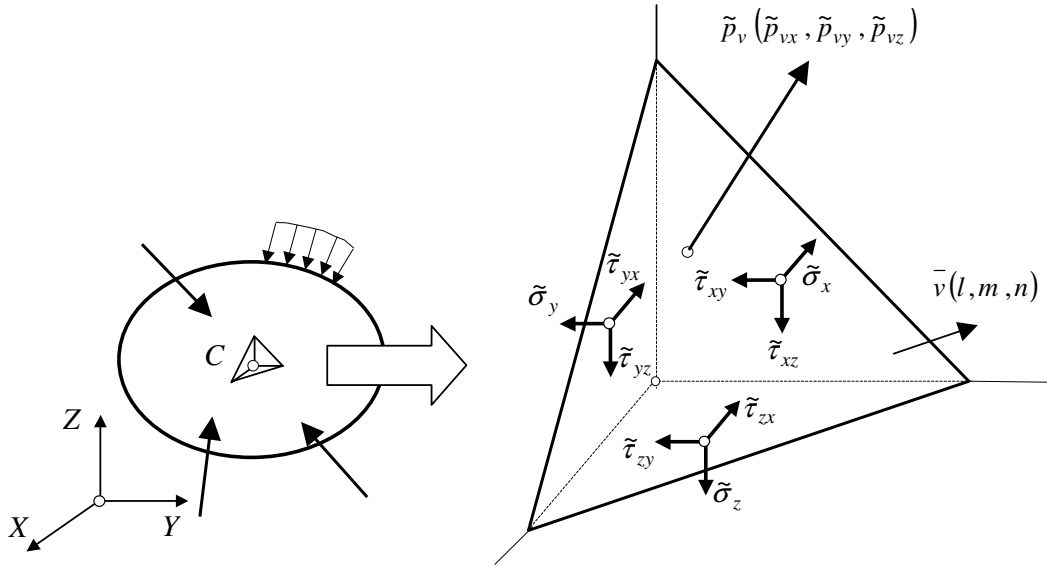
gdzie:  $P_x, P_y, P_z$  współrzędne siły masowej.

Równania (4.4) dowodzą, że macierz naprężeń jest symetryczna, a równania różniczkowe (4.5) stanowią warunki konieczne które winny spełniać funkcje trzech zmiennych aby móc być elementami macierzy naprężeń. Równania różniczkowe (4.5) noszą nazwę równań równowagi wewnętrznej lub równań Naviera i muszą być stowarzyszone ze statycznymi

warunkami brzegowymi wiążącymi obciążenie brzegu bryły z elementami macierzy naprężeń.

#### 4.4. Współrzędne wektora naprężenia na dowolnej płaszczyźnie. Tensor naprężeń

Wytnijmy z wnętrza bryły, będącej w równowadze, nieskończenie mały czworościan wokół dowolnego punktu  $C$ , którego trzy ściany będą równoległe do płaszczyzn układu odniesienia a czwarta będzie równoległa do dowolnej płaszczyzny o wersorze normalnym  $\bar{v}(l, m, n)$ . Zakładając, że znamy macierz naprężeń w tym punkcie będziemy chcieli wyznaczyć wektor naprężenia  $\bar{p}_v(p_{vx}, p_{vy}, p_{vz})$  na tej czwartej dowolnej płaszczyźnie (rys. 4.5).



Rys. 4.5

Oznaczmy pola ścianek czworościanu odpowiednio prostopadłych do osi układu odniesienia przez:  $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$ , a pole czwartej przez  $\Delta A$ . Ponieważ współrzędne wersora normalnego czwartej dowolnie nachylonej ścianki czworościanu  $l = \cos(v, X), m = \cos(v, Y), n = \cos(v, Z)$  to między polami powierzchni ścianek czworościanu zachodzą zależności:

$$\Delta A_x = \Delta A l, \quad \Delta A_y = \Delta A m, \quad \Delta A_z = \Delta A n.$$

Tilda „~” nad naprężeniami na rys. 4.5 oznacza średnią wartość naprężeń na powierzchni ścianki czworościanu.

Warunki równowagi sił działających na wycięty czworościan dają równania:

$$\sum X = 0 \rightarrow \tilde{p}_{vx} \Delta A = \tilde{\sigma}_x \Delta A_x + \tilde{\tau}_{yx} \Delta A_y + \tilde{\tau}_{zx} \Delta A_z \rightarrow \tilde{p}_{vx} = \tilde{\sigma}_x l + \tilde{\tau}_{yx} m + \tilde{\tau}_{zx} n$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow \tilde{p}_{vy} \Delta A = \tilde{\tau}_{xy} \Delta A_x + \tilde{\sigma}_y \Delta A_y + \tilde{\tau}_{zy} \Delta A_z \rightarrow \tilde{p}_{vy} = \tilde{\tau}_{xy} l + \tilde{\sigma}_y m + \tilde{\tau}_{zy} n$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow \tilde{p}_{vz} \Delta A = \tilde{\tau}_{xz} \Delta A_x + \tilde{\tau}_{yz} \Delta A_y + \tilde{\sigma}_z \Delta A_z \rightarrow \tilde{p}_{vz} = \tilde{\tau}_{xz} l + \tilde{\tau}_{yz} m + \tilde{\sigma}_z n$$

Po wykonaniu przejścia granicznego z bokami czworościanu do zera z zachowaniem nachylenia czwartej ścianki w powyższych równaniach w miejsce średnich wartości współrzędnych naprężeń otrzymujemy wartości w rozważanym punkcie i po wykorzystaniu symetrii macierzy naprężeń otrzymujemy zależności wiążące jej współrzędne ze współrzędnymi wektora naprężenia:

$$\begin{aligned}
 p_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\
 p_{vy} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\
 p_{vz} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Równania (4.6) dowodzą, że:

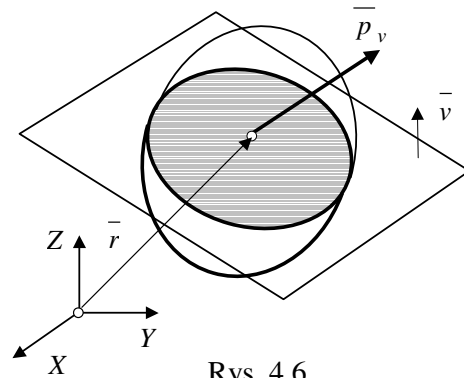
macierz naprężeń w danym punkcie określa w nim stan naprężenia gdyż znajomość jej elementów pozwala na wyznaczenie współrzędnych wektora naprężenia na dowolnej płaszczyźnie przechodzącej przez ten punkt.

Równania (4.6) możemy zapisać jeszcze w innej zwartej macierzowej formie:

$$\bar{p}_v = T_\sigma \bar{v} \rightarrow \begin{pmatrix} p_{vx} \\ p_{vy} \\ p_{vz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Powyższe równania pokazują, że w wyniku mnożenia macierzy naprężeń  $T_\sigma$  przez wektor  $\bar{v}$  otrzymujemy wektor naprężenia  $\bar{p}_v$ .

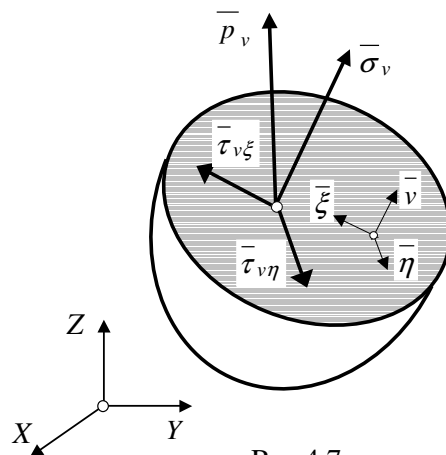
Możemy też to sformułować bardziej formalnie, że macierz naprężeń w punkcie jest wielkością, która dowolnemu kierunkowi  $\bar{v}$  - normalna do płaszczyzny przecięcia bryły w tym punkcie, przyporządkowuje wektor  $\bar{p}_v$  - wektor naprężenia na tej płaszczyźnie (rys. 4.6).



Rys. 4.6

To wyżej powiedziane stanowi dowód na to, że macierz naprężeń jest tensorem drugiego rzędu co oznacza, że jej elementy transformują się przy zmianie układu odniesienia w pewien ściśle określony sposób zwany prawem transformacji tensora.

Mając współrzędne wektora naprężenia, na dowolnej płaszczyźnie,  $\bar{p}_v (p_{vx}, p_{vy}, p_{vz})$  określone w wyjściowym układzie współrzędnych, łatwo możemy wyznaczyć jego współrzędne odniesione do układu związanego z tą płaszczyzną, wyznaczonego przez ortonormalną trójkę wersorów  $\bar{v}(l, m, n)$ ,  $\bar{\xi}(l_1, m_1, n_1)$ ,  $\bar{\eta}(l_2, m_2, n_2)$ . Pierwszy z tych wersorów jest normalny do płaszczyzny a dwa pozostałe są do niej styczne (rys.4.7).



Rys.4.7

Zacniemy od rozłożenia wektora  $\bar{p}_v$  na trzy składowe (rys.4.7)

$$\bar{p}_v = \bar{\sigma}_v + \bar{\tau}_{v\xi} + \bar{\tau}_{v\eta}, \quad (4.8)$$

z których  $\bar{\sigma}_v$  to naprężenie normalne do płaszczyzny a dwie pozostałe  $\bar{\tau}_{v\xi}$  i  $\bar{\tau}_{v\eta}$  są do niej styczne i równoległe do wersorów  $\bar{\xi}$  i  $\bar{\eta}$ , a ich suma przedstawia całkowite naprężenie styczne:

$$\bar{\tau}_v = \bar{\tau}_{v\xi} + \bar{\tau}_{v\eta}.$$

Współrzędne wektora  $\bar{p}_v$  w układzie odniesienia wyznaczonym przez trójkę wersorów  $(\bar{v}, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ , oznaczmy tak jak jego składowe opuszczając jedynie nadkreślenie. Otrzymamy je mnożąc skalarnie  $\bar{p}_v$  przez odpowiednie wersory (bo to rzuty wektora na oś) i tak:

$$\sigma_v = \bar{v} \bar{p}_v, \quad \tau_{v\xi} = \bar{\xi} \bar{p}_v, \quad \tau_{v\eta} = \bar{\eta} \bar{p}_v. \quad (4.9)$$

Uwzględniając w ( 4.9 ) związki ( 4.7) otrzymujemy zależności:

$$\sigma_v = (l, m, n) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\tau_{v\xi} = (l_1, m_1, n_1) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

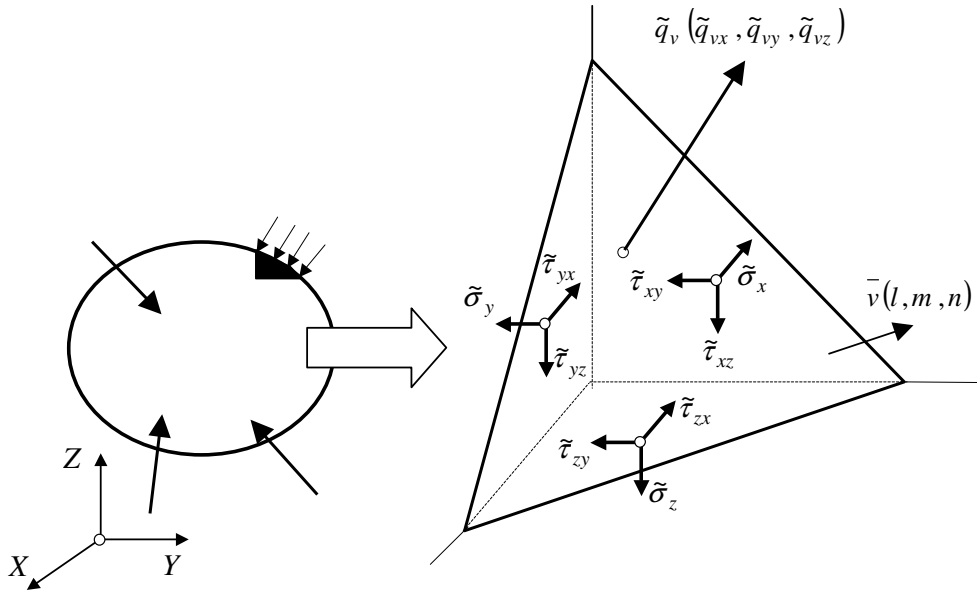
$$\tau_{v\eta} = (l_2, m_2, n_2) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

które są konsekwencją tego, że macierz naprężeń jest tensorem.

Macierzowy zapis tych powyższych zależności jest bardzo wygodny w obliczeniach zwłaszcza gdy korzystamy z ogólnie dostępnych profesjonalnych kalkulacyjnych programów komputerowych np. typu Excel czy Madcad.

#### 4.5. Statyczne warunki brzegowe

Z rozważanej na rys. 4.5 bryły w równowadze wytnijmy przy jej brzegu elementarny czworościan którego trzy ściany będą równoległe do płaszczyzn układu odniesienia a czwarta będzie zawierała element powierzchni zewnętrznej  $\Delta S$  o wersorze normalnym zewnętrznym  $\bar{v}(l, m, n)$ .



Rys. 4.8

Analizując, analogicznie jak w punkcie poprzednim, warunki równowagi tak wyciętego czworościanu otrzymujemy zależności wiążące współrzędne obciążenia bryły  $\bar{q}_v (q_{vx}, q_{vy}, q_{vz})$  w rozważanym punkcie brzegowym ze współzrędnymi macierzy naprężeń w tym punkcie:

$$\begin{aligned} q_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ q_{vy} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ q_{vz} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (4.13)$$

Równania (4.13) noszą nazwę statycznych warunków brzegowych i jak już wspomniano są niezbędne przy rozwiązywaniu równań różniczkowych Naviera.

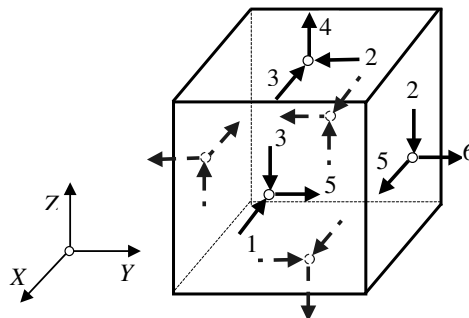
Styczne warunki brzegowe (4.13) choć bardzo podobne do równań (4.6), merytorycznie różnią się zasadniczo. Przede wszystkim lewe strony (4.13) są znane (bo to zadane obciążenie brzegu bryły) w przeciwieństwie do równań (4.6) w których lewe strony to poszukiwane współrzędne naprężenia na zadanej dowolnej płaszczyźnie.

#### 4.6. Przykłady

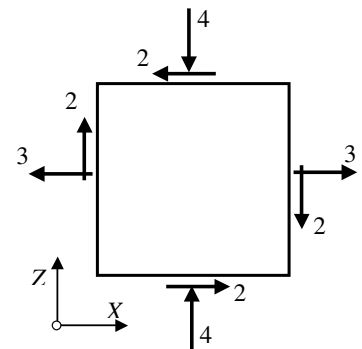
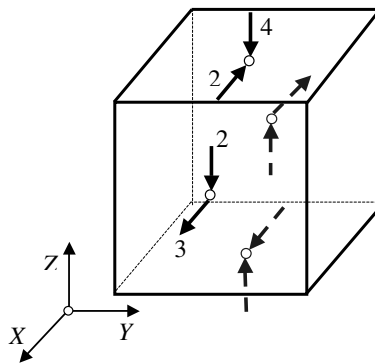
**Przykład 4.6.1.** Narysować graficzne obrazy danych macierzy naprężeń i określić jaki stan naprężenia reprezentują.

**Rozwiązanie**

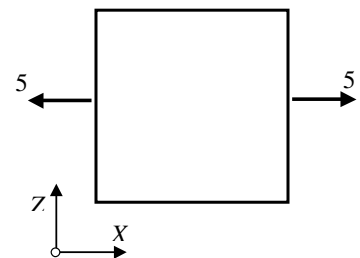
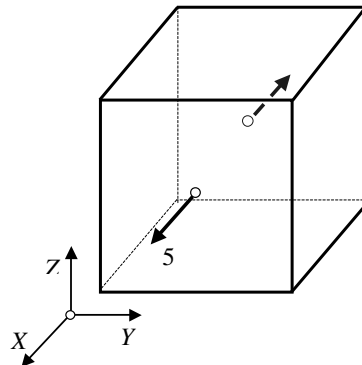
$$T_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$



$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$



$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$



Równania (4.6) rozstrzygają o tym, że pierwsza macierz reprezentuje przestrzenny stan naprężenia, druga płaski stan, którego płaszczyzną naprężenia jest płaszczyzna  $(X, Z)$ , a stan naprężenia określony trzecią macierzą jest jednoosiowy.

**Przykład 4.6.2.** W punkcie w którym panuje stan naprężenia określony macierzą naprężenia

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -100 & 50 & 60 \\ 50 & 200 & -20 \\ 60 & -20 & 100 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

wyznaczyć:

- współrzędne wektora naprężenia na płaszczyźnie o wektorze normalnym  $\bar{v}(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ ,
- długość wektora naprężenia normalnego  $\sigma_v$  i stycznego  $\tau_v$  na tej płaszczyźnie,
- współrzędne wektora naprężenia normalnego stycznego na tej płaszczyźnie.

### Rozwiązanie

Współrzędne wektora naprężenia wyznaczamy z zależności:

$$\bar{p}_v = T_{\sigma} \bar{v} \rightarrow \begin{pmatrix} p_{vx} \\ p_{vy} \\ p_{vz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$p_{vx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = -100 * \frac{1}{2} + 50 * \frac{1}{2} + 60 * \frac{1}{\sqrt{2}} = 17.426 \text{ MPa}$$

$$p_{vy} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 50 * \frac{1}{2} + 200 * \frac{1}{2} - 20 * \frac{1}{\sqrt{2}} = 110.858 \text{ MPa}$$

$$p_{vz} = \tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = 60 * \frac{1}{2} - 20 * \frac{1}{2} + 100 * \frac{1}{\sqrt{2}} = 90.711 \text{ MPa}$$

Naprężenie normalne

$$\sigma_v = \bar{p}_v \bar{v} = p_{vx} l + p_{vy} m + p_{vz} n = 17.426 * \frac{1}{2} + 110.858 * \frac{1}{2} + 90.711 * \frac{1}{\sqrt{2}} = 128.284 \text{ MPa}$$

Długość wektora naprężenia stycznego

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2 \rightarrow \tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}$$

$$p_v^2 = p_{vx} p_{vx} + p_{vy} p_{vy} + p_{vz} p_{vz} = 20821.647 \text{ (MPa)}^2, \sigma_v^2 = 128.284^2 = 16456.785 \text{ (MPa)}^2$$

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{20821.647 - 16456.785} = 66.067 \text{ MPa}$$

Ponieważ  $\bar{\sigma}_v = \sigma_v \bar{v}$ , to współrzędne wektora naprężenia normalnego  $\bar{\sigma}_v (\sigma_{vx}, \sigma_{vy}, \sigma_{vz})$  są

$$\text{równe: } \sigma_{vx} = \sigma_v l = \frac{128.284}{2} = 64.142 \text{ MPa}, \quad \sigma_{vy} = \sigma_v m = \frac{128.284}{2} = 64.142 \text{ MPa},$$

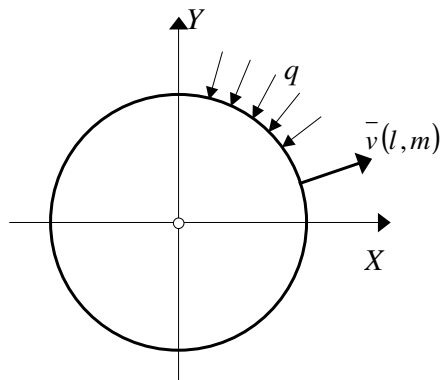
$$\sigma_{vz} = \sigma_v n = \frac{128.284}{\sqrt{2}} = 90.710 \text{ MPa}.$$

Z zależności  $\bar{p}_v = \bar{\sigma}_v + \bar{\tau}_v$ , wynika, że współrzędne wektora naprężenia stycznego

$$\bar{\tau}_v (\tau_{vx}, \tau_{vy}, \tau_{vz}) \text{ mają wartości: } \tau_{vx} = p_{vx} - \sigma_{vx} = -3.787 - 64.142 = -67.929 \text{ MPa}$$

$$\tau_{vy} = p_{vy} - \sigma_{vy} = 110.858 - 64.142 = 46.716 \text{ MPa}, \quad \tau_{vz} = p_{vz} - \sigma_{vz} = 90.711 - 90.710 = 0.001 \text{ MPa}.$$

**Przykład 4.6.3.** Brzeg tarczy kołowej o promieniu  $R$  obciążony jest na całym swym obwodzie obciążeniem normalnym o stałej gęstości  $q$ . Napisać statyczne warunki brzegowe dla tej tarczy.



Równanie brzegu tarczy:

$$f(x, y) = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

**Rozwiązanie**

Współrzędne wersora normalnego do brzegu:

$$l = \frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}} \rightarrow l = 2x / \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = x/R$$

$$m = \frac{\partial f / \partial y}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}} \rightarrow m = 2y / \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = y/R$$

Statyczne warunki brzegowe

$$\bar{q}_v = T_\sigma \bar{v}$$

$$q_{vx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m \rightarrow -ql = \sigma_x l + \tau_{xy} m$$

$$q_{vy} = \tau_{yx} l + \sigma_y m \rightarrow -qm = \tau_{yx} l + \sigma_y m$$

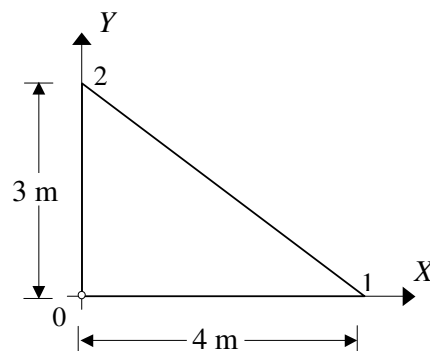
i ostatecznie

$$-qx = \sigma_x x + \tau_{xy} y$$

$$-qy = \tau_{yx} x + \sigma_y y$$

gdzie  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  są elementami tensora naprężeń na brzegu tarczy, są więc funkcjami jednej zmiennej.

**Przykład 4.6.4.** Wyznaczyć obciążenie pokazanej tarczy spełniające warunki równowagi i statyczne warunki brzegowe, jeśli stan naprężenia w jej punktach określają zależności  $\sigma_x = 12xy$ ,  $\sigma_y = 6x$ ,  $\tau_{xy} = -12$



$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 12xy & -12 \\ -12 & 6x \end{pmatrix}$$

### Rozwiązanie

Obciążenie tarczy stanowią siły masowe i siły przyłożone na jej brzegach.

Siły masowe wyznaczmy z równań Naviera (są to równania równowagi wewnętrznej ale i warunki konieczne na to aby podane funkcje naprężeń były współrzędnymi tensora naprężeń).

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + P_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + P_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12y + P_x = 0 \\ P_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_x = -12y \\ P_y = 0 \end{cases}$$

Obciążenia brzegów tarczy wyznaczmy ze statycznych warunków brzegowych.

$$\begin{cases} q_{vx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ q_{vy} = \tau_{yx} l + \sigma_y m \end{cases}$$

Brzeg 0-1;

Równanie brzegu :  $y = 0$

$l = 0, m = -1$

$$q_{vx} = -12 * (-1) = 12$$

$$q_{vy} = 6x * (-1) = -6x$$

Brzeg 0-2;

Równanie brzegu :  $x = 0$

$l = -1, m = 0$

$$q_{vx} = 12x y * (-1) = 0$$

$$q_{vy} = -12 * (-1) = 12$$

Brzeg 1-2;

Równanie brzegu :  $y = -0.75x + 3$

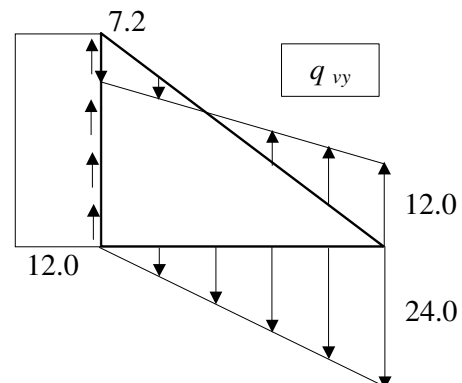
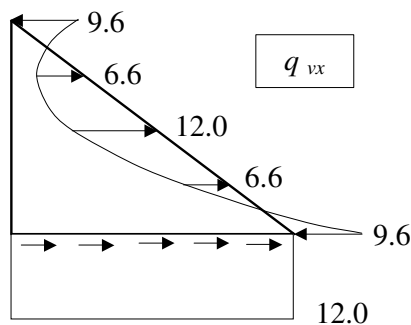
$l = \cos(\nu, X) = 0.6, m = \cos(\nu, Y) = 0.8$

$$q_{vx} = 12x y * 0.6 - 12 * 0.8 = 7.2x y - 9.6 =$$

$$= -5.4x^2 + 21.6x - 9.6$$

$$q_{vy} = -12 * 0.6 + 6x * 0.8 = 4.8x - 7.2$$

$x$	$q_{vx}$	$q_{vy}$
0	-9.6	-7.2
1	6.6	-2.4
2	12.0	2.4
3	6.6	7.2
4	-9.6	12.0



Sprawdzenie równowagi obliczonych sił działających na tarczę.

$$\sum X = 0; \sum_{(K)} \int q_{vx} ds + \iint_A P_x dA = 0$$

$$\int_0^4 12 dx + \int_{(1-2)} (-5.4x^2 + 21.6x - 9.6) ds + \iint (-12y) dx dy = 0$$

$$\sum Y = 0; \sum_{(K)} \int q_{vy} ds + \iint_A P_y dA = 0$$

$$\int_0^4 -6x dx + \int_0^3 12 dy + \int_{(1-2)} (4.8x - 7.2) ds = 0$$

$$\sum M_O = 0; \sum_{(K)} \int (x q_{vy} - y q_{vx}) ds + \iint_A (x P_y - y P_x) dA = 0$$