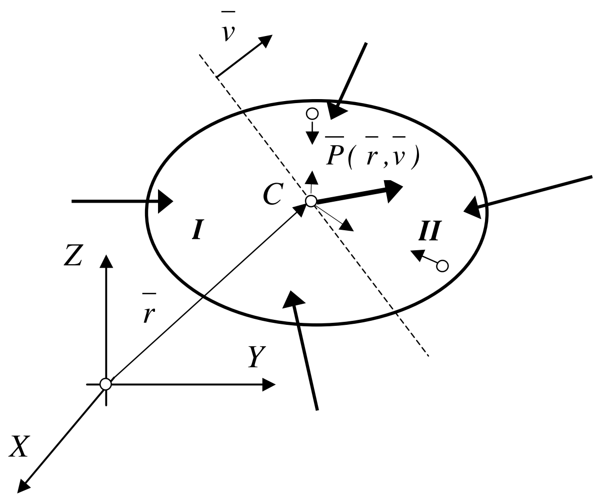
3. SIŁY WEWNĘTRZNE I PRZEKROJOWE

3.1 Siła wewnętrzna



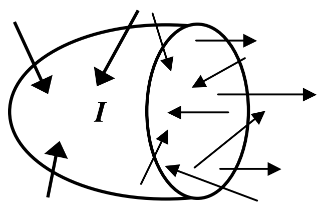
Rys. 3.1

Rozważmy ciało materialne pozostające w równowadze pod działaniem zrównoważonego układu sił zewnętrznych { **Z** } (rys. 3.1). Zgodnie z założeniem o continuum materialnym ciało to jest gęsto wypełniającym objętość zbiorem punktów materialnych.
Pod wpływem przyłożonych obciążeń ciało zmienia swoje kształty i wymiary ale zachowuje ciągłość, bo to podstawowe żądanie jakie stawiamy konstrukcji, co świadczy o istnieniu między punktami materialnymi pewnych więzów – sił międzycząsteczkowych.
Wybierzmy wewnątrz bryły dowolny punkt *C* o wektorze wodzącym $\bar{r}$ i dokonajmy myślowego podziału bryły na dwie części płaszczyzną o normalnej zewnętrznej $\bar{v}$. Między punktem *C* leżącym na płaszczyźnie podziału i przyporządkowanym części *I* a wszystkimi punktami części *II* istnieją wzajemne oddziaływania. Założymy, że te oddziaływania między cząsteczkowe sprowadzają się jedynie do sił, bez momentów.
Przyjmiemy teraz ważną definicję:

siłą wewnętrzną $\bar{P} = \bar{P}(\bar{r},\bar{v})$ w danym punkcie o wektorze wodzącym $\bar{r}$ na płaszczyźnie przekroju o wersorze normalnym $\bar{v}$ nazywamy wypadkową sił międzycząsteczkowych z jakimi wszystkie punkty części *II* rozważanej bryły wyznaczonej płaszczyzną przekroju działają na ten punkt przyporządkowany części *I*.

Jak łatwo zauważyć w ogólności wypadkowa ta będzie zależała od wyboru punktu i płaszczyzny przekroju bryły i stąd jest ona funkcją wektorową dwóch wektorów $\bar{r}$ i $\bar{v}$.
Obrazowo możemy powiedzieć, że siła wewnętrzna w punkcie *C* to siła z jaką wszystkie punkty materialne części *II* chcą np. wyrwać ten punkt z części *I*.
Oczywiście całe rozumowanie wygląda analogicznie gdy punkt *C* przypiszemy części *II*.
W tym miejscu warto zwrócić uwagę na dwie sprawy:

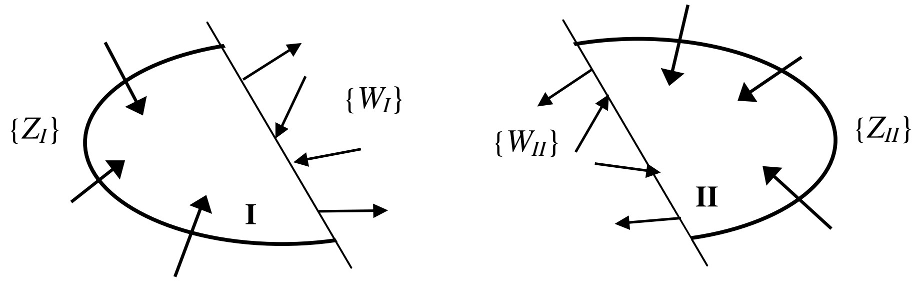
- podziału bryły dokonujemy na dwie i tylko dwie części,
- błędne jest powiedzenie: siła wewnętrzna w danym punkcie lub na danej płaszczyźnie przekroju. Należy określić i punkt i płaszczyznę przekroju.



Zgodnie z postulatem o więzach dokonując podziału konstrukcji na dwie części możemy np. cześć *II* odrzucić zastępując jej działanie układem sił wewnętrznych przyłożonych do każdego punktu płaszczyzny przekroju. Wyznaczenie układu sił wewnętrznych w zadanym przekroju będzie jednym z naszych podstawowych celów, gdyż jego znajomość jest dla inżyniera konstruktora bardzo ważna, pozwala mu bowiem ocenić, czy w danym punkcie ciała nie nastąpi utrata spójności materiału lub daje możliwość określenia koniecznego wzmocnienia w danym kierunku, np. przez ułożenie zbrojenia w betonie.

3.2 Twierdzenie o równoważności układów sił wewnętrznych i zewnętrznych

Jak już powiedzieliśmy poszukiwanie układu sił wewnętrznych w zadanym przekroju jest dla nas bardzo ważnym zadaniem. Teraz odpowiemy na pytanie, czy istnieje związek między układem sił wewnętrznych i zewnętrznych.
Rozważmy ciało w równowadze pod działaniem układu sił zewnętrznych $\{ Z \} \equiv \{ 0 \}$ i dokonajmy jego podziału na dwie części płaszczyzną o normalnej $\bar{v}$ (rys.3.2).



Rys. 3.2

Oznaczmy przez:
$\{Z_I\}$ – układ sił zewnętrznych przyłożonych do części *I* myślowo rozciętej bryły,
$\{Z_{II}\}$ – układ sił zewnętrznych przyłożonych do części *II* myślowo rozciętej bryły,
$\{W_I\}$ – układ sił wewnętrznych przyłożonych do części *I* pochodzący od działania części *II*,
$\{W_{II}\}$ – układ sił wewnętrznych przyłożonych do części *II* pochodzący od działania części *I*.
Z warunków równowagi ciała jako całości jak i poszczególnych jego części wynikają zależności:

$$\{ Z_I\} + \{ Z_{II}\} \equiv \{ 0 \}, \tag{3.1}$$

$$\{ Z_I\} + \{ W_I\} \equiv \{ 0 \}, \tag{3.2}$$

$$\{ Z_{II}\} + \{ W_{II}\} \equiv \{ 0 \}. \tag{3.3}$$

Z (3.2) wynika, że $\{ W_I\} \equiv -\{ Z_I\}$, a z (3.1), że $\{ Z_{II}\} \equiv - \{ Z_I\}$ zatem

$$\{ W_I\} \equiv \{ Z_{II}\}. \tag{3.4}$$

Z (3.3) wynika, że $\{ W_{II}\} \equiv -\{ Z_{II}\}$, a z (3.1), że $\{ Z_I\} \equiv - \{ Z_{II}\}$ stąd

$$\{ W_{II}\} \equiv \{ Z_I\}. \tag{3.5}$$

Ponadto z zasady akcji i reakcji wnosimy:

$$\{ W_I\} \equiv - \{ W_{II}\}. \tag{3.6}$$

Zależności (3.4) i (3.5) możemy przedstawić w formie twierdzenia o równoważności odpowiednich układów sił wewnętrznych i zewnętrznych:

układ sił wewnętrznych, przyłożonych do przekroju jednej części myślowo rozciętej bryły jest równoważny układowi sił zewnętrznych przyłożonych do jej drugiej części.

Zwróćmy uwagę, że mimo iż układy $\{ Z_I \}$ oraz $\{ Z_{II} \}$ są znane to zależności (3.4) i (3.5) nie pozwalają na wyznaczenie układów $\{ W_I \}$ i $\{ W_{II} \}$ gdyż układów równoważnych danemu można zbudować nieskończenie wiele, jednakże, twierdzenie o równoważności jest bardzo cenne, bo pozwala na wyznaczenie elementów zredukowanego układu sił wewnętrznych. Wynika to ze znanego twierdzenia o układach równoważnych, które mówi, że:
jeśli dwa układy sił są równoważne, to równe są ich sumy i równe są ich momenty liczone względem tego samego punktu.
Zatem na podstawie wyżej dowiedzionego twierdzenia możemy zapisać:

$$\{W_I\} \equiv \{Z_{II}\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{S}\{W_I\} = \overline{S}\{Z_{II}\} \\ \overline{M}_0\{W_I\} = \overline{M}_0\{Z_{II}\} \end{cases}, \tag{3.7}$$

$$\{W_{II}\} \equiv \{Z_I\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{S}\{W_{II}\} = \overline{S}\{Z_I\} \\ \overline{M}_0\{W_{II}\} = \overline{M}_0\{Z_I\} \end{cases}. \tag{3.8}$$

gdzie: $\overline{S}\{\ \}$ i $\overline{M}_0\{\ \}$ to suma i moment względem punktu O rozważanego układu sił.

Zależności (3.7) i (3.8) będziemy bardzo często wykorzystywać w analizie konstrukcji prętowych.

3.3. Siły przekrojowe w konstrukcjach prętowych

Przyjmiemy kilka prostych definicji:

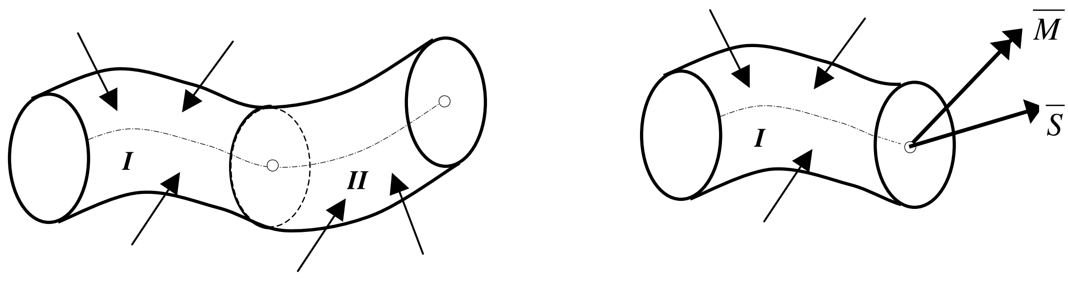
- pręt, słup, belka to bryła, w której dwa wymiary są znacznie mniejsze od trzeciego – długości,
- oś pręta to miejsce geometryczne punktów, będących środkami ciężkości przekrojów pręta dowolnymi płaszczyznami przecinającymi jego pobocznicę,
- przekrój poprzeczny pręta to przekrój płaszczyzną prostopadłą do jego osi,
- pręt pryzmatyczny to pręt o osi prostej i stałym przekroju poprzecznym.

Pręt jest najczęściej spotykanym w praktyce inżynierskiej elementem konstrukcji dlatego też on będzie modelem ciała w naszych rozważaniach.

Poszukując elementów zredukowanego układu sił przyłożonych do jednej z przeciętych części pręta przyjmiemy umowę, że:

- zredukowanego układu sił poszukiwać będziemy na płaszczyźnie przekroju poprzecznego
- biegunem redukcji będzie środek ciężkości tego przekroju.

Weźmy dowolny pręt w równowadze pod działaniem układu sił zewnętrznych (rys.3.3), podzielmy go na dwie części, odrzućmy część *II* i korzystając z twierdzenia o równoważności odpowiednich układów sił, wyznaczmy elementy zredukowanego do środka ciężkości przekroju poprzecznego układu sił wewnętrznych przyłożonych do części *I*.

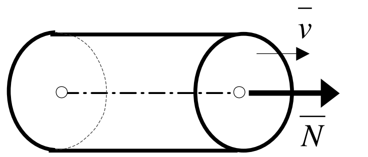


Rys. 3.3

W ogólnym przypadku w wyniku redukcji otrzymamy układ złożony z wektora sumy $\overline{S}$ i wektora momentu $\overline{M}$. Mogą się jednak zdarzyć szczególne przypadki redukcji układu sił wewnętrznych, które nazywamy prostymi przypadkami wytrzymałości:

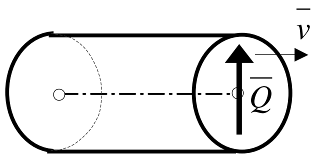
- **Rozciąganie lub ściskanie osiowe**

Występuje ono wtedy, gdy układ sił wewnętrznych redukuje się do wypadkowej prostopadłej do przekroju poprzecznego. Jeśli ma ona zwrot zgodny z normalną zewnętrzną to występuje rozciąganie osiowe w przeciwnym przypadku mamy do czynienia ze ściskaniem osiowym. Wypadkową tę nazywamy siłą podłużną lub osiową i najczęściej oznaczamy przez $\overline{N}$.



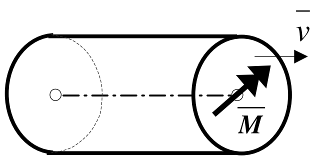
- **Ścinanie**

Występuje ono wtedy, gdy układ sił wewnętrznych redukuje się do wypadkowej stycznej do przekroju poprzecznego. Wypadkową tę nazywamy siłą poprzeczną lub tnącą i najczęściej oznaczamy przez $\overline{Q}$.



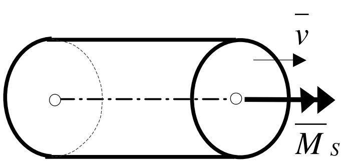
- **Zginanie**

Występuje ono wtedy, gdy układ sił wewnętrznych redukuje się do pary sił której, wektor momentu jest styczny do przekroju poprzecznego. Moment ten nazywamy momentem zginającym i oznaczamy przez $\overline{M}$.



- **Skręcanie**

Występuje ono wtedy, gdy układ sił wewnętrznych redukuje się do pary sił, której wektor momentu jest prostopadły do przekroju poprzecznego. Moment ten nazywamy momentem skręcającym i oznaczamy przez $\overline{M}_S$.



Dowolny zredukowany układ sił wewnętrznych można wyrazić poprzez odpowiednią kombinację wyżej opisanych prostych przypadków.

Składowe zredukowanego układ sił wewnętrznych $\overline{N}, \overline{Q}, \overline{M}$ i $\overline{M}_S$ nazywamy siłami przekrojowymi. Po przyjęciu odpowiedniej umowy ich znakowania (np. zgodnie ze zwrotami układu własnego przekroju poprzecznego pręta i spodami) możemy posługiwać się nimi jak współrzędnymi opuszczając nadkreślenie.