

2. CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH

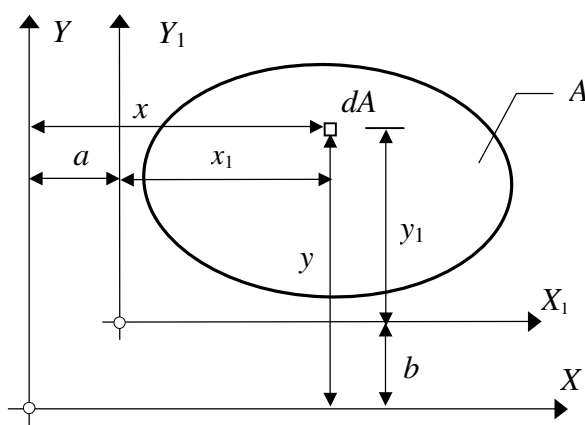
2.1. Definicje podstawowych charakterystyk geometrycznych

Podczas zajęć z *wytrzymałości materiałów* spotkamy się z następującymi charakterystykami geometrycznymi figur płaskich:

- pole powierzchni figury,
- moment statyczny figury względem danej osi,
- moment bezwładności figury względem danej osi,
- moment dewiacji (odśrodkowy) względem danych osi,
- biegunowy moment bezwładności,
- promień bezwładności,
- wskaźnik wytrzymałości,
- rdzeń przekroju.

Omówimy teraz pierwszych sześć, pozostałe w toku dalszych wykładów i ćwiczeń.

Rozważmy figurę płaską, pokazaną na rys.2.1, stanowiącą obszar A , określony w kartezjańskim układzie osi (X, Y)



Rys. 2.1

Polem powierzchni tej figury nazywamy:

$$A = \iint_A dA \quad [\text{m}^2] \quad (> 0).$$

Momentem statycznym figury płaskiej o polu A względem osi X nazywamy :

$$S_x = \iint_A y dA \quad [\text{m}^3] \quad (>, =, < 0).$$

Momentem statycznym figury płaskiej o polu A względem osi Y nazywamy :

$$S_y = \iint_A x dA \quad [\text{m}^3] \quad (>, =, < 0).$$

Obliczamy momenty statyczne tej figury względem nowych osi (X_1, Y_1) przesuniętych o a i b względem osi (X, Y) . Ponieważ:

$$y_1 = y - b \quad i \quad x_1 = x - a,$$

to:

$$S_{x_1} = \iint_A y_1 dA = \iint_A (y - b) dA = S_x - b A,$$

$$S_{y_1} = \iint_A x_1 dA = \iint_A (x - a) dA = S_y - a A.$$

$$S_{x_1} = S_x - b A, \quad S_{y_1} = S_y - a A \quad (2.1)$$

gdzie: a i b współrzędne początku nowego układu w starym.

Postawmy teraz takie zadanie: mając osie (X, Y) znaleźć położenie nowych osi (X_c, Y_c) względem których momenty statyczne będą równe zero.

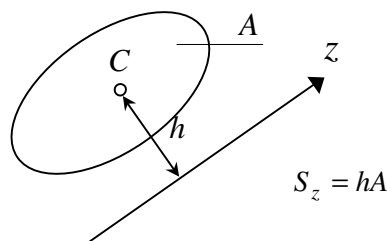
Z równania (2.1) łatwo otrzymujemy współrzędne początku nowego układu osi (X_c, Y_c) względem których momenty statyczne są równe zero:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} \quad (2.2)$$

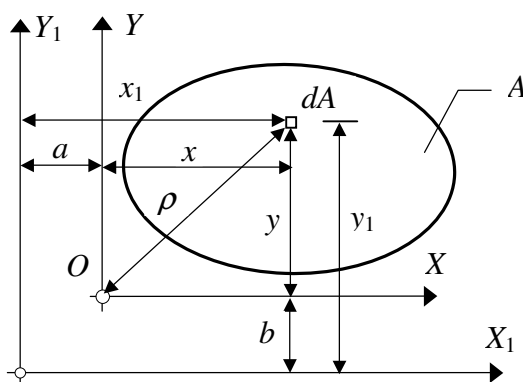
Punkt C o współrzędnych określonych wzorami (2.2) nazywać będziemy środkiem ciężkości figury płaskiej, a osie, które przechodzą przez środek ciężkości nazywamy osiami centralnymi.

Osie centralne figury płaskiej to osie względem których jej momenty statyczne są równe zero.

Wzory (2.2) pozwalają wyznaczyć moment statyczny figury względem dowolnej osi, bez konieczności całkowania, jeśli tylko znamy jej pole powierzchni A i położenie jej środka ciężkości C .



Zdefiniujemy teraz kolejno momenty bezwładności, moment dewiacji i biegunowy moment bezwładności.



Rys. 2.2

Momentem bezwładności figury płaskiej o polu A (rys.2.2) względem osi X nazywamy:

$$J_x = \iint_A y^2 dA \quad [\text{m}^4] \quad (> 0).$$

Momentem bezwładności figury płaskiej o polu A względem osi Y nazywamy:

$$J_y = \iint_A x^2 dA \quad [\text{m}^4] \quad (> 0).$$

Momentem dewiacji figury płaskiej o polu A względem układu osi (X, Y) nazywamy:

$$J_{xy} = \iint_A xy \, dA \quad [\text{m}^4] \quad (>, =, < 0).$$

Biegunowym momentem bezwładności figury płaskiej o polu A względem bieguna O nazywamy:

$$J_0 = \iint_A \rho^2 \, dA \quad [\text{m}^4] \quad (> 0).$$

Ponieważ: $\rho^2 = x^2 + y^2$, to łatwo zobaczyć, że: $J_0 = J_x + J_y$ co pozwala stwierdzić, że:

biegunowy moment bezwładności względem dowolnego punktu równa się sumie momentów bezwładności względem dwóch do siebie prostopadłych osi przechodzących przez ten punkt.

Obliczmy momenty bezwładności i dewiacji tej figury względem nowych osi (X_1, Y_1) przesuniętych o a i b względem osi (X, Y) . Ponieważ:

$$y_1 = y + b \quad i \quad x_1 = x + a, \quad \text{to:}$$

$$J_{x_1} = \iint_A y_1^2 \, dA = \iint_A (y + b)^2 \, dA = \iint_A (y^2 + 2by + b^2) \, dA = J_x + 2bS_y + b^2A,$$

$$J_{y_1} = \iint_A x_1^2 \, dA = \iint_A (x + a)^2 \, dA = \iint_A (x^2 + 2ax + a^2) \, dA = J_y + 2aS_x + a^2A,$$

$$J_{x_1y_1} = \iint_A x_1y_1 \, dA = \iint_A (x + a)(y + b) \, dA = J_{xy} + aS_y + bS_x + abA.$$

Jeśli stare osie (X, Y) są osiami centralnymi to $S_x = 0$ oraz $S_y = 0$ i otrzymujemy wzory stanowiące treść twierdzenia Steinera:

$$J_{x_1} = J_{xc} + b^2 A$$

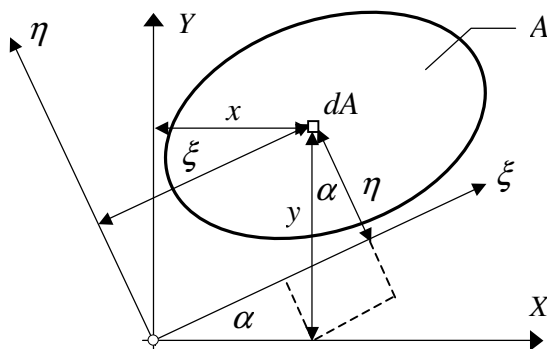
$$J_{y_1} = J_{yc} + a^2 A$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xcyc} + ab A$$

(2.3)

gdzie: J_{xc}, J_{yc}, J_{xcyc} , momenty bezwładności i dewiacji względem osi centralnych zgodnie równoległych z osiami (X_1, Y_1) , a i b współrzędne środka ciężkości figury w układzie (X_1, Y_1) .

Wyznamy teraz momenty bezwładności i dewiacji względem układu osi (ξ, η) obróconego względem początku układu (X, Y) o kąt α , jak to pokazane jest na rys.2.3.



Rys. 2.3

Łatwo zobaczyć, że współrzędne punktu w nowym układzie związane są ze współrzędnymi w starym układzie poprzez zależności:

$$\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad \eta = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha, & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

gdzie: $\begin{pmatrix} \cos \alpha, & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & \cos \alpha \end{pmatrix}$ - macierz przejścia od układu starego do nowego, jej wiersze to współrzędne wektorów kierunkowych nowych osi w starym układzie.

Zgodnie z definicjami momentów bezwładności i dewiacji otrzymujemy:

$$J_{\xi} = \iint_A \eta^2 dA = \iint_A (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 dA = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$J_{\eta} = \iint_A \xi^2 dA = \iint_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned} J_{\xi\eta} &= \iint_A \xi \eta dA = \iint_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) dA = \\ &= J_{xy} \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin^2 \alpha + J_x \sin \alpha \cos \alpha - J_y \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu zależności trygonometrycznych:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2, \quad \sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2,$$

mamy ostatecznie:

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$J_{\eta} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha, \quad (2.4)$$

$$J_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

Warto zapamiętać te zależności. Wzory o identycznej strukturze jeszcze nie raz pojawią się w *wytrzymałości materiałów*.

Bez trudu można stwierdzić, że:

$$J_{\xi} + J_{\eta} = J_x + J_y,$$

czyli, że suma momentów bezwładności figury płaskiej względem dwóch dowolnych ale prostopadłych do siebie osi o wspólnym początku jest wielkością stałą i co możemy dodać równa się jej biegunowemu momentowi bezwładności względem punktu początkowego.

2.2. Główne osie i momenty bezwładności

Postawimy, teraz ważne pytanie: o jaki kąt α należy obrócić układ osi (X,Y) aby momenty bezwładności w nowym układzie osiągnęły wartości ekstremalne.

Jest to proste zadanie poszukiwania ekstremum funkcji jednej zmiennej.

Warunki zerowania się pochodnych momentów bezwładności J_ξ i J_η względem kąta α :

$$\frac{dJ_\xi}{d\alpha} = -2 \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha - 2 J_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

$$\frac{dJ_\eta}{d\alpha} = 2 \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + 2 J_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

dają jedno równanie:

$$\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Z powyższego równania, którego lewa strona to moment dewiacji $J_{\xi\eta}$ względem nowych osi otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x} + n \frac{\pi}{2} \quad (2.5)$$

co dowodzi, że osie względem których momenty bezwładności osiągają wartości ekstremalne, a moment dewiacji jest równy zero są do siebie prostopadłe. Tworzą one układ osi, który nazywać będziemy układem głównych osi bezwładności. Zatem:

główne osie bezwładności figury płaskiej w dowolnym punkcie to dwie prostopadłe osie względem których jej moment dewiacji jest równy zero a momenty bezwładności są ekstremalne (główne momenty bezwładności).

Policzmy wartości głównych momentów bezwładności.

Wykorzystując wzory trygonometryczne:

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

w których za $\operatorname{tg} 2\alpha$ wstawiamy wzór (2.5), podstawiamy je do wzorów na J_ξ oraz J_η i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{J_x - J_y}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \pm J_{xy} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \\
 &\pm \frac{J_x - J_y}{2} \frac{\sqrt{(J_y - J_x)^2}}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}} \pm J_{xy} \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} \frac{\sqrt{(J_y - J_x)^2}}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}} = , \\
 &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \left[\frac{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}} \right] = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2}
 \end{aligned}$$

co ostatecznie zapiszemy w postaci:

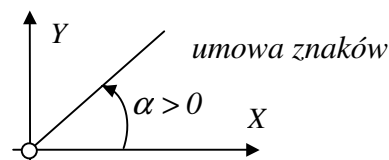
$$J_{max} = J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2} \quad (2.6)$$

$$J_{min} = J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2}$$

Wzór (2.5) podaje jedynie kąt transformacji układu wyjściowego do układu głównych osi bezwładności nie określając jednak, której osi odpowiada J_{max} a której J_{min} . Można wyprowadzić zależności podające położenie tych osi; przedstawiają się one następująco:

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{max}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_{min} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{min}} \quad (2.7)$$

We wzorach (2.7) α_{max} oznacza kąt o jaki należy obrócić oś X do pokrycia się z główną osią bezwładności względem której moment bezwładności jest maksymalny. Analogicznie definiujemy kąt α_{min} .



W wytrzymałości materiałów interesować nas będzie przede wszystkim położenie tzw. głównych centralnych osi bezwładności rozważanej figury tj. osi głównych poprowadzonych przez jej środek ciężkości.

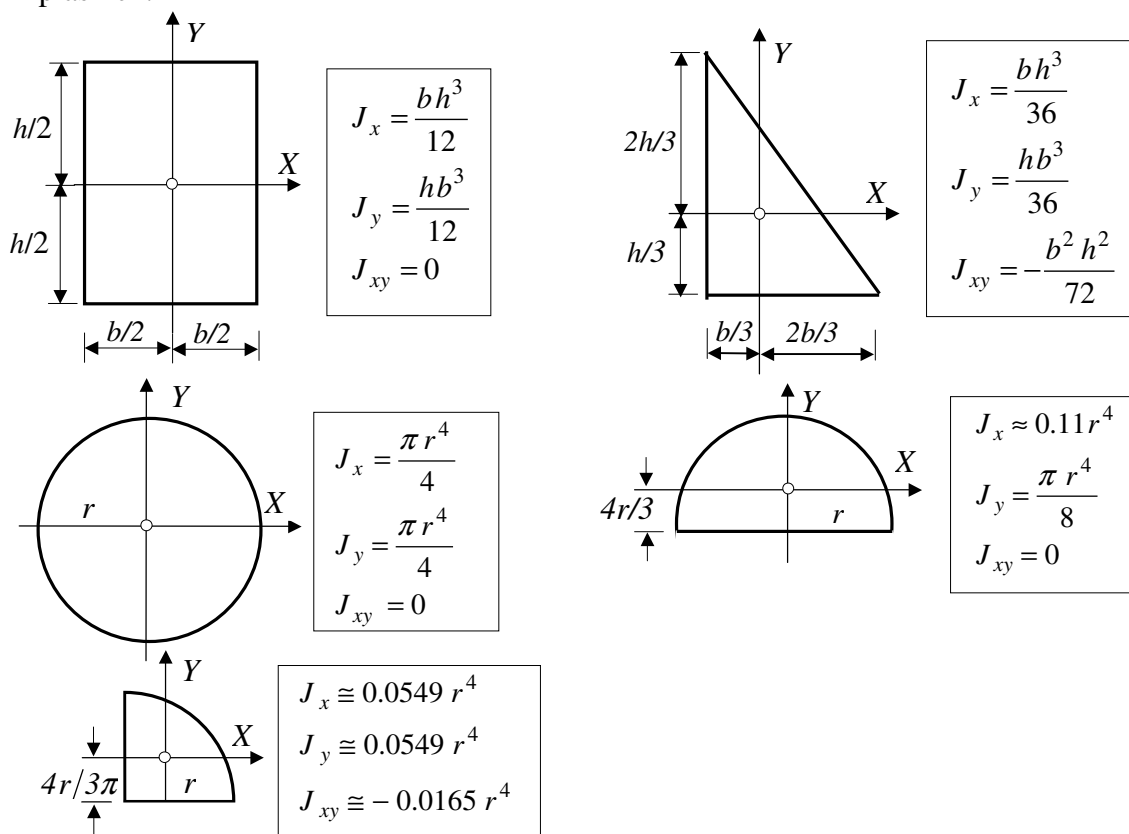
Względem tych osi zerują się momenty statyczne, bo są one osiami centralnymi oraz moment dewiacji, bo są one osiami głównymi.

Momenty bezwładności względem tych osi nazywać będziemy głównymi centralnymi momentami bezwładności.

Na koniec kilka ważnych uwag praktycznych:

- jeżeli figura posiada oś symetrii, to jest ona jedną z jej głównych centralnych osi bezwładności,
- jeżeli figura posiada dwie osie symetrii, to są one jej głównymi centralnymi osiami bezwładności,
- przy obliczaniu momentów statycznych, bezwładności i dewiacji warto korzystać z własności addytywności całki podwójnej (równa się ona sumie całek po obszarach częściowych) i podzielić rozważaną figurę na części, których obliczane momenty oraz położenie środków ciężkości znamy, a następnie zesumować te częściowe wyniki.

Warto więc znać i pamiętać charakterystyki geometryczne kilku podstawowych figur płaskich.

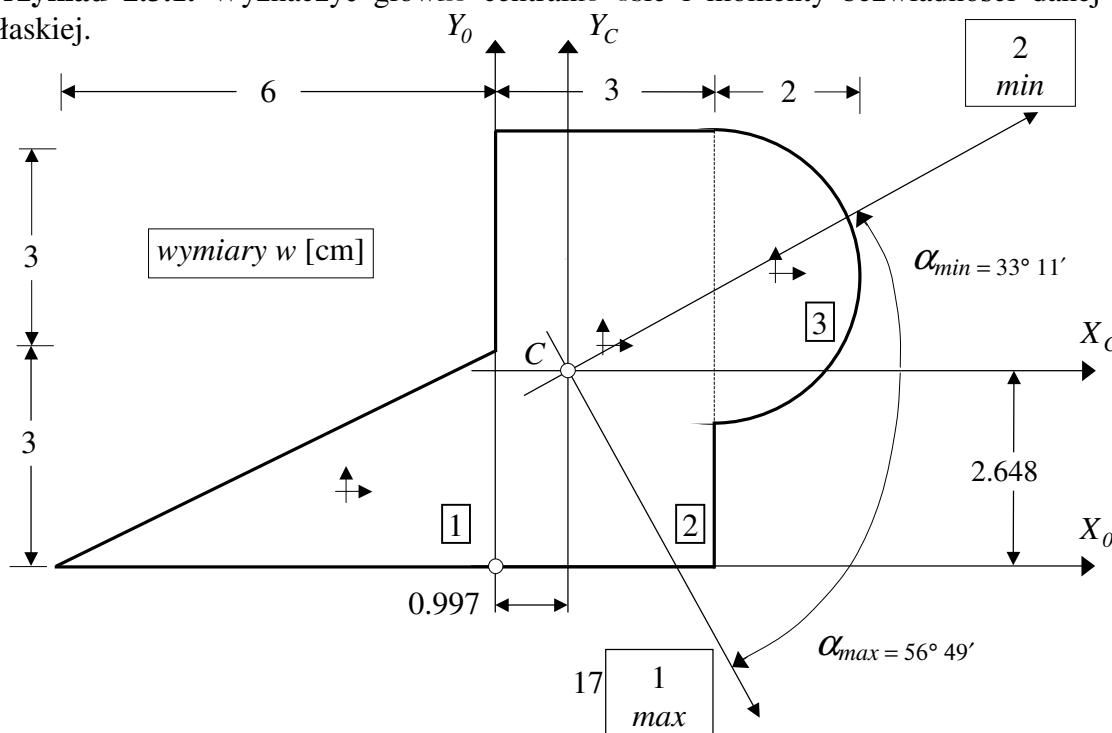


Promieniem bezwładności figury płaskiej o polu A względem dowolnej osi Z nazywamy wartość dodatnią:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} \quad [\text{m}] .$$

2.3. Przykłady

Przykład 2.3.1. Wyznaczyć główne centralne osie i momenty bezwładności danej figury płaskiej.



Rozwiązanie

Podzielimy figurę na trzy części: trójkąt, prostokąt i półkole.

Położenie środka ciężkości:

$$A = 0.5 * 6 * 3 + 3 * 6 + 0.5 * \pi * 2^2 = 33.283 \text{ cm}^2,$$

$$S_{x0} = 0.5 * 6 * 3 * 1 + 3 * 6 * 3 + 0.5 * \pi * 2^2 * 4 = 88.133 \text{ cm}^3,$$

$$S_{y0} = 0.5 * 6 * 3 * (-2) + 3 * 6 * 1.5 + 0.5 * \pi * 2^2 * (3 + 4/3 * 2/\pi) = 33.183 \text{ cm}^3,$$

$$x_c = \frac{S_{y0}}{A} = \frac{33.183}{33.283} = 0.997 \text{ cm}, \quad y_c = \frac{S_{x0}}{A} = \frac{88.133}{33.283} = 2.648 \text{ cm}.$$

Momenty bezwładności i dewiacji względem osi centralnych:

$$J_{xc} = \frac{6 * 3^3}{36} + \frac{1}{2} * 3 * 6 * (-1.648)^2 + \frac{3 * 6^3}{12} + 3 * 6 * 0.352^2 + \frac{\pi * 2^4}{8} + \frac{\pi * 2^2}{2} * 1.352^2 = 102.942 \text{ cm}^4,$$

$$J_{yc} = \frac{3 * 6^3}{36} + \frac{1}{2} * 3 * 6 * (-2.997)^2 + \frac{6 * 3^3}{12} + 3 * 6 * 0.503^2 + 0.11 * 2^4 + \frac{\pi * 2^2}{2} * \left(\frac{4 * 2}{3 * \pi} + 2.003 \right)^2 = 169.753 \text{ cm}^4,$$

$$J_{xcyc} = \frac{6^2 * 3^2}{72} + \frac{1}{2} * 3 * 6 * (-1.648)(-2.997) + 3 * 6 * 0.352 * 0.503 + \frac{\pi * 2^2}{2} * 1.352 * \left(\frac{4 * 2}{3 * \pi} + 2.003 \right) = 76.364 \text{ cm}^4.$$

Główne centralne osie i momenty bezwładności:

$$J_{max} = \frac{J_{xc} + J_{yc}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{xc} - J_{yc}}{2} \right)^2 + J_{xcyc}^2} = \frac{102.942 + 169.753}{2} + \sqrt{\left(\frac{102.942 - 169.753}{2} \right)^2 + 76.364^2} = 136.347 + 83.351 = 219.698 \text{ cm}^4,$$

$$J_{min} = \frac{J_{xc} + J_{yc}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{xc} - J_{yc}}{2} \right)^2 + J_{xcyc}^2} = \frac{102.942 + 169.753}{2} - \sqrt{\left(\frac{102.942 - 169.753}{2} \right)^2 + 76.364^2} = 136.347 - 83.351 = 52.996 \text{ cm}^4,$$

$$\text{tg } \alpha_{max} = \frac{J_{xcyc}}{J_{yc} - J_{max}} = \frac{76.364}{169.753 - 219.698} = -1.529 \rightarrow \alpha_{max} = -56^\circ 49',$$

$$\text{tg } \alpha_{min} = \frac{J_{xcyc}}{J_{yc} - J_{min}} = \frac{76.364}{169.753 - 52.996} = 0.654 \rightarrow \alpha_{min} = 33^\circ 11'.$$

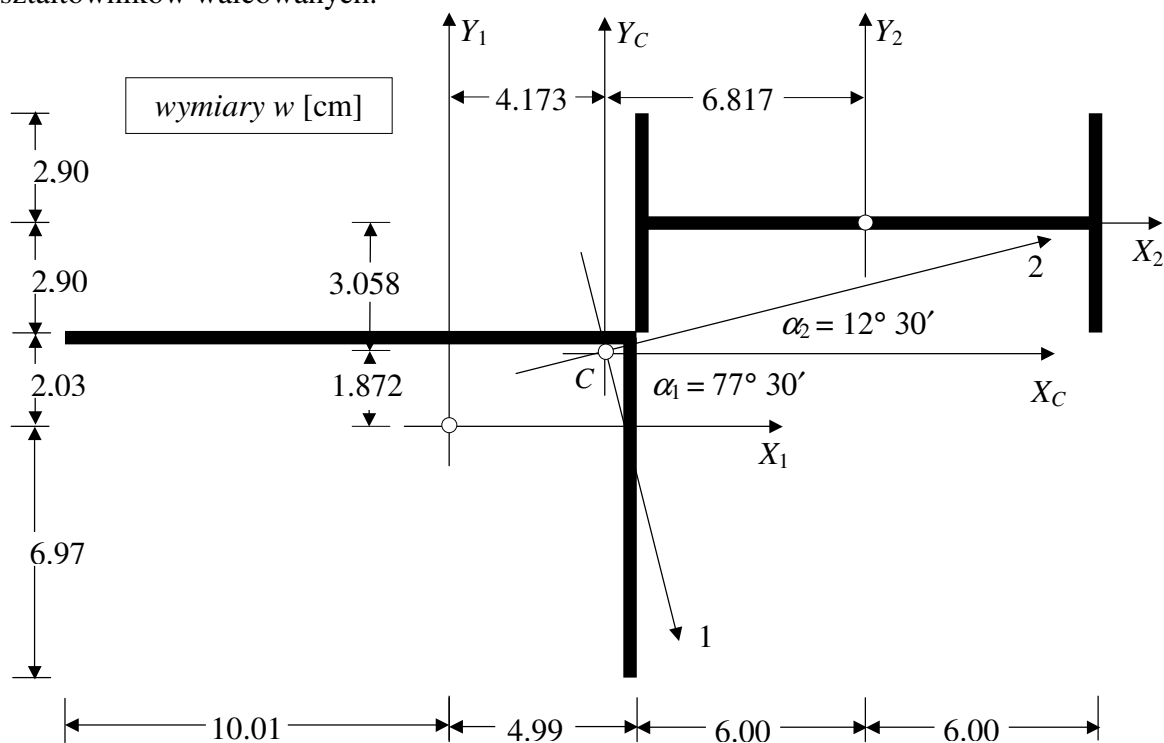
Sprawdzenia:

$$J_{xc} + J_{yc} = 102.942 + 169.753 = 272.695 \text{ cm}^4,$$

$$J_{max} + J_{min} = 219.698 + 52.996 = 272.694 \text{ cm}^4,$$

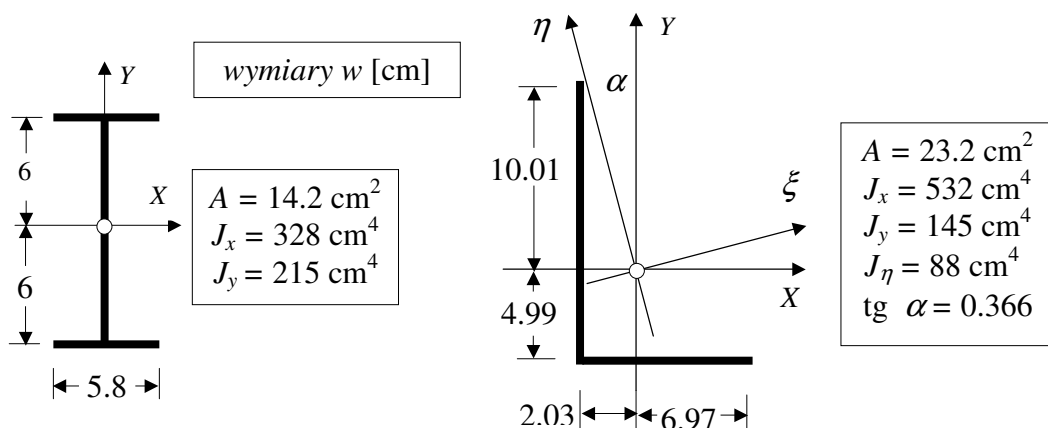
$$|\alpha_{max}| + |\alpha_{min}| = 58^\circ 49' + 33^\circ 11' = 90^\circ.$$

Przykład 2.3.2. Wyznaczyć główne centralne osie i momenty bezwładności układu stalowych kształtowników walcowanych.



Rozwiązanie

Dane z tablic profili walcowanych:



Obliczenie momentu dewiacji kątownika względem osi własnych w oparciu o dane z tablic:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\max}} \rightarrow J_{xy} = \operatorname{tg} \alpha_{\max} (J_y - J_{\max}),$$

osie (ξ, η) to główne centralne osie kątownika, przy czym $J_\xi = J_{\max}$ a $J_\eta = J_{\min}$, zatem:

$$J_x + J_y = J_{\max} + J_{\min} \rightarrow J_{\max} = J_x + J_y - J_{\min},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\max}} \rightarrow J_{xy} = \operatorname{tg} \alpha_{\max} (J_y - J_{\max}) = \operatorname{tg} \alpha_{\max} [J_y - (J_x + J_y - J_{\min})],$$

$$J_{xy} = \operatorname{tg} \alpha (J_\eta - J_x) = 0.366(88 - 532) = -162.504 \text{ cm}^4.$$

Położenie środka ciężkości całego układu kształtowników:

$$A = 23.2 + 14.2 = 37.40 \text{ cm}^2,$$

$$S_{x1} = 14.2 * 4.93 = 70.006 \text{ cm}^3,$$

$$S_{y1} = 14.2 * 10.99 = 156.058 \text{ cm}^3,$$

$$x_c = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{156.058}{37.4} = 4.173 \text{ cm}, \quad y_c = \frac{S_{x1}}{A} = \frac{70.006}{37.4} = 1.872 \text{ cm}.$$

Momenty bezwładności i dewiacji względem osi centralnych:

$$J_{xc} = 145 + 23.2 * (-1.872)^2 + 215 + 14.2 * 3.058^2 = 574.091 \text{ cm}^4,$$

$$J_{yc} = 532 + 23.2 * (-4.173)^2 + 328 + 14.2 * 6.817^2 = 1923.898 \text{ cm}^4,$$

$$J_{xcyc} = -162.504 + 23.2 * (-4.173) * (-1.872) + 14.2 * 6.817 * 3.058 = 314.750 \text{ cm}^4.$$

Główne centralne osie i momenty bezwładności:

$$J_1 = J_{\max} = \frac{574.091 + 1923.898}{2} + \sqrt{\left(\frac{574.091 - 1923.898}{2}\right)^2 + 314.750^2} =$$

$$= 1248.994 + 744.689 = 1993.683 \text{ cm}^4,$$

$$J_2 = J_{\min} = \frac{574.091 + 1923.898}{2} - \sqrt{\left(\frac{574.091 - 1923.898}{2}\right)^2 + 314.750^2} =$$

$$= 1248.994 - 744.689 = 504.305 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{314.750}{1923.898 - 1993.683} = -4.510 \rightarrow \alpha_1 = -77^\circ 30',$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{314.750}{1923.898 - 504.305} = 0.222 \rightarrow \alpha_2 = 12^\circ 30'.$$

Sprawdzenia:

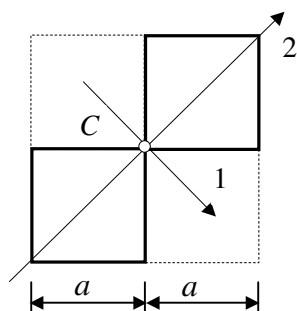
$$J_{xc} + J_{yc} = 574.091 + 1923.898 = 2497.989 \text{ cm}^4,$$

$$J_1 + J_2 = 1993.683 + 504.305 = 2497.988 \text{ cm}^4,$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = 77^\circ 30' + 12^\circ 30' = 90^\circ.$$

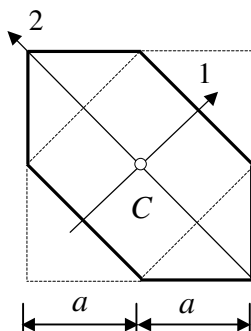
Przykład 2.3.3. Łatwo można sprawdzić, że moment bezwładności względem dowolnej osi przechodzącej przez środek ciężkości kwadratu o boku a wynosi $a^4/12$.

To spostrzeżenie bardzo ułatwi wyznaczenie głównych centralnych momentów bezwładności niżej pokazanych figur płaskich o dwóch osiach symetrii.



$$J_1 = \frac{(2a)^4}{12} - \frac{2a^4}{12} = \frac{14a^4}{12}$$

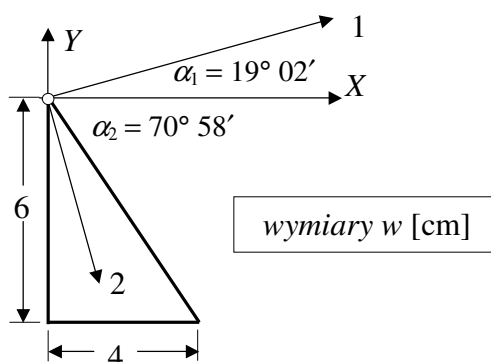
$$J_2 = \frac{2a^4}{12}$$



$$J_1 = \frac{(2a)^4}{12} - \frac{a^4}{12} = \frac{15a^4}{12}$$

$$J_2 = \frac{(a\sqrt{2})^4}{12} + \frac{a^4}{12} = \frac{5a^4}{12}$$

Przykład 2.3.4. Wyznaczyć główne osie bezwładności przechodzące przez wierzchołek trójkąta i momenty bezwładności względem tych osi.



Rozwiązanie

Prowadzimy układ dwóch prostopadłych do siebie osi (X , Y) przechodzących przez wierzchołek trójkąta.

Obliczamy momenty bezwładności i dewiacji względem tych osi.

$$J_x = \frac{4 \cdot 6^3}{4} = 216 \text{ cm}^4, \quad J_y = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4.$$

Przy obliczaniu $J_x = bh^3/4$, wykorzystano wzór na moment bezwładności trójkąta prostokątnego względem osi przechodzącej przez jego wierzchołek i równoległej do jego podstawy. Przy obliczaniu $J_y = bh^3/12$, wykorzystano wzór na moment bezwładności trójkąta prostokątnego względem osi przechodzącej przez jego podstawę.

W obu wzorach, których wyprowadzenie przy wykorzystaniu twierdzenia Steinera jest bardzo proste, h jest wymiarem tego boku trójkąta, który jest prostopadły do osi względem której liczymy moment bezwładności.

$$J_{xy} = -\frac{4^2 \cdot 6^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot (-4) = -72 \text{ cm}^4.$$

Główne momenty i osie bezwładności przechodzące przez wierzchołek trójkąta:

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{216 + 32}{2} + \sqrt{\left(\frac{216 - 32}{2}\right)^2 + (-72)^2} = 240.825 \text{ cm}^4,$$

$$J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{216 + 32}{2} - \sqrt{\left(\frac{216 - 32}{2}\right)^2 + (-72)^2} = 7.175 \text{ cm}^4,$$

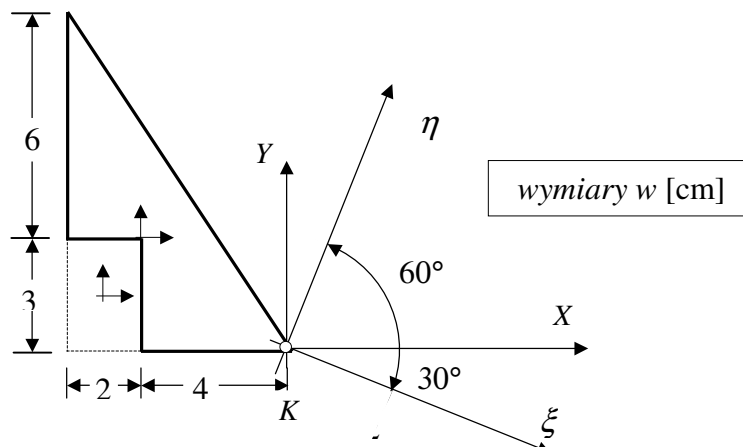
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} = \frac{-72}{32 - 240.825} = 0.345 \rightarrow \alpha_1 = 19^\circ 02',$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2} = \frac{-72}{32 - 7.175} = -2.900 \rightarrow \alpha_2 = -70^\circ 58'.$$

Bardzo ważne przypomnienie. W każdym punkcie płaszczyzny w której dana jest figura można wyznaczyć dwie wzajemnie do siebie prostopadłe osie względem których moment dewiacji będzie równy zero a momenty bezwładności będą ekstremalne. Osie te nazywają się osiami głównymi i tylko głównymi.

Osie główne wyznaczone w środku ciężkości figury są osiami głównymi centralnymi. Ich własnością jest zerowanie się momentów statycznych (bo to osie centralne) oraz zerowanie się momentu dewiacji i osiąganie ekstremalnych wartości momentów bezwładności (bo to osie główne).

Przykład 2.3.5. Wyznaczyć momenty bezwładności J_ξ i J_η oraz moment dewiacji $J_{\xi\eta}$ względem osi przechodzących przez punkt K dla danej niżej figury płaskiej.



Rozwiązanie

Należy zastosować wzory transformacyjne (2.4).

Momenty bezwładności i dewiacji względem osi (X, Y):

$$J_x = \frac{6 \cdot 9^3}{12} - \frac{2 \cdot 3^3}{3} = 346.500 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = \frac{9 \cdot 6^3}{4} - \left[\left(\frac{3 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 3 \cdot (-5)^2 \right) \right] = 334.000 \text{ cm}^4,$$

$$J_{xy} = \left[-\frac{6^2 \cdot 9^2}{72} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot (-4) \cdot 3 \right] - [0 + 2 \cdot 3 \cdot (-5) \cdot 1.5] = -319.500 \text{ cm}^4.$$

Momenty bezwładności i dewiacji względem osi (ξ, η):

$$\begin{aligned} J_\xi &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos(-60^\circ) - J_{xy} \sin(-60^\circ) = \\ &= \frac{346.0 + 334.0}{2} + \frac{346.5 - 334.0}{2} \cdot 0.5 + 319.5 \cdot (-0.866) = 66.680 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\eta &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos(120^\circ) - J_{xy} \sin(120^\circ) = \\ &= \frac{346.0 + 334.0}{2} + \frac{346.5 - 334.0}{2} \cdot (-0.5) + 319.5 \cdot 0.866 = 613.820 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

$$J_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin(-60^\circ) + J_{xy} \cos(-60^\circ) = \frac{346.5 - 334.0}{2} \cdot (-0.866) - 319.5 \cdot 0.5 = -165.162 \text{ cm}^4.$$

Sprawdzenie:

$$J_x + J_y = 346.500 + 334.000 = 680.500 \text{ cm}^4$$

$$J_\xi + J_\eta = 66.680 + 613.820 = 680.500 \text{ cm}^4$$